

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

DAVIESOV COUPLING –
IMPLEMENTÁCIA A VLASTNOSTI
V 1D LINEARIZOVANOM
MODELI PLYTKEJ VODY

MATÚŠ MARTÍNI-NOVÁK

2003

DAVIESOV COUPLING –
IMPLEMENTÁCIA A VLASTNOSTI
V 1D LINEARIZOVANOM
MODELI PLYTKEJ VODY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

MATÚŠ MARTÍNI - NOVÁK

KATEDRA METEOROLÓGIE A KLIMATOLÓGIE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Vedúci dipl. práce: RNDr. Martin Gera, PhD.

Konzultant: Mgr. Ján Mašek

Bratislava 2003

ČESTNÉ VYHLÁSENIE

Čestne vyhlasujem, že predkladanú diplomovú prácu som vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava

Pod'akovanie

Touto cestou by som chcel poďakovať predovšetkým môjmu konzultantovi Mgr. Jankovi Mašekovi za odbornú prípravu a ochotu riešiť každý problém. Rovnako ďakujem aj školiteľovi RNDr. Martinovi Gerovi, PhD. za uvedenie do problematiky a poskytnutie kľúčovej literatúry.

Napokon vďaka patrí aj všetkým ostatným, ktorí mi akýmkoľvek spôsobom pomohli a podporili ma v mojom úsilí: Mgr. Martinovi Vojtekovi za pomoc v ťažkých začiatkoch, Jurajovi Stachovi za cenné rady z oblasti výpočtovej techniky a všetkým učiteľom nielen z Katedry meteorológie.

Osobitná vďaka patrí mojim rodičom a mojej manželke za podporu v štúdiu a trpezlivosť.

Obsah

Zoznam obrázkov	6
1 Úvod	7
2 Ciele práce	10
3 Rovnice plytkej vody	11
4 Formulácia úlohy – počiatočné a okrajové podmienky	15
4.1 Periodická okrajová podmienka	15
4.2 Bočné okrajové podmienky, problém preurčenia	16
5 Numerická schéma	18
5.1 Diskretizácia	20
5.2 Stabilita	21
5.3 Disperzné vlastnosti – fázová a grupová rýchlosť	21
6 Interakcia riadiaceho a vloženého modelu	23
6.1 Požiadavky kladené na couplingovu schému	24
6.2 Daviesova relaxačná schéma pre systém plytkej vody	25
6.2.1 Spojitý prípad	25
6.2.2 Diskrétny prípad	26
6.2.3 Zhrnutie	27
7 Numerické experimenty	29
7.1 Integrácia globálneho modelu, periodické okrajové podmienky	30
7.2 Nepriepustná hranica, odraz od pevnej steny	33
7.3 Otvorená hranica, 4 význačné prípady	35
7.3.1 Formulácia úlohy, analytické riešenie vloženého modelu	35
7.3.2 Numerické riešenie vloženého modelu	36

Prípád 1	36
Prípád 2, 3	38
Prípád 4	38
7.4 Minimalizácia odrazu	42
7.4.1 Vplyv rozlíšenia	42
7.4.2 Voľba váhovej funkcie	43
7.5 Spoločná integrácia riadiaceho a vloženého modelu	46
8 Problémy spojené s použitím couplingu v podmienkach NWP	51
9 Záver	53
Zoznam použitých skratiek a symbolov	55
Zoznam literatúry	57
Dodatky	58
A. Schéma <i>leapfrog</i> so semi-implicitnou korekciou	58
B. Vlnová rovnica pre strunu, okrajové podmienky	59

Zoznam obrázkov

1	Voľná hladina.	12
2	Korektná LBC na pravom okraji v rovnici advekcie.	17
3	Disperzné vlastnosti <i>forward-backward</i> schémy.	22
4	4 význačné prípady interakcie riadiaceho a vloženého modelu.	25
5	Počiatkový stav na kružnici.	31
6	Globálny model s periodickou okrajovou podmienkou.	32
7	Detailný odraz od pevnej steny.	34
8	Prípád 1 – Vstup vlny z riadiaceho modelu.	37
9	Prípád 2 – Výstup vlny, ktorá nie je reprezentovaná v LAM-e.	39
10	Prípád 3 – Výstup vlny, ktorá nie je reprezentovaná v LS.	40
11	Prípád 4 – Relikt v LAM doméne bezprostredne po výstupe vlny.	41
12	Váhová funkcia $\beta(x)$ na 1D doméne vloženého modelu.	42
13	Maximálny reflexný koeficient r v prípade 3 pre rôzne váhové funkcie.	45
14	Spoločná integrácia riadiaceho a vloženého modelu bez použitia RZ.	48
15	Spoločná integrácia riadiaceho a vloženého modelu s použitím RZ.	49
16	Spoločná integrácia riadiaceho a vloženého modelu, v ktorom je rýchlosť šírenia o 10% menšia.	50
17	Problém dipólu a rýchlej cyklóny.	52
18	Voľný a pevný koniec pre strunu.	60

1 Úvod

Numerická integrácia rovníc atmosférickej dynamiky zohráva dnes významnú úlohu pri zostavovaní predpovedí počasia. Operatívne numerické modely musia spĺňať niekoľko špecifických požiadaviek. Na jednej strane presnosť predpovede vyžaduje jemné rozlíšenie výpočtovej siete a dostatok kvalitných pozorovaní. Na druhej strane prenos dát a samotný výpočet môže trvať iba obmedzený čas, ktorý musí byť oveľa kratší ako dĺžka predpovede. Časová efektívnosť použitých algoritmov je preto prvoradým kritériom.

Numerické predpovedné modely (NWP¹) môžeme rozdeliť do dvoch skupín: globálne modely a modely na ohraničenej oblasti (LAM²). Na to, aby sme získali detailnú numerickú predpoveď, musí náš predpovedný model mať zodpovedajúce rozlíšenie. Pokiaľ je oblasť nášho záujmu ohraničená, riešenie poskytnuté globálnym modelom s vysokým rozlíšením by bolo veľmi drahé a časovo náročné. Pre ohraničenú oblasť existujú úspornejšie prístupy:

- a) Použitie globálneho modelu s premenlivým rozlíšením.
- b) Použitie dvojice modelov – riadiaceho globálneho modelu s nízkym rozlíšením a vloženého LAM modelu s vysokým rozlíšením, pričom LAM doména pokrýva oblasť záujmu. Interakcia modelov môže byť jednosmerná alebo obojsmerná. Pri jednosmernej interakcii je globálny model integrovaný nezávisle od LAM-u, ktorému predpisuje bočné okrajové podmienky. V prípade obojsmernej interakcie musia byť oba modely integrované simultánne. To si v praxi vyžaduje, aby boli oba modely integrované v tom istom centre, keďže objem dát prenášaný pri obojsmernej interakcii je veľmi veľký.

Prístup a) využíva napr. francúzsky model ARPEGE. V súčasnosti používa výpočtovú sieť, ktorej rozlíšenie sa mení v rozmedzí 22 až 270 km. Najlepšie rozlíšenie dosahuje v oblasti prvoradého záujmu (centrálne Francúzsko), najhoršie na opačnej strane zemegule. Prístup b) priamo využíva napr. dvojica modelov DWD/GME a DWD/LM. Keďže skok v rozlíšení medzi riadiacim a vloženým modelom by nemal byť príliš veľký

¹NWP – Numerical Weather Prediction

²LAM – Limited Area Model

(neodporúča sa prekročiť hodnotu 2.5), niekedy je potrebné použiť viacnásobné vnorenie, prípadne ho skombinovať s prístupom a). Ako príklad môže poslúžiť reťaz ARPEGE → ALADIN/LACE → ALADIN/SLOVAKIA.

Nevýhodou prístupu a) je fakt, že v celom rozsahu rozlíšenia sa používajú tie isté fyzikálne parametrizácie. Tým je obmedzený interval použiteľných rozlíšení. Naopak pri metóde b) môže mať vložený model odlišnú fyziku ako riadiaci model.

Keďže zemský povrch nemá okraj (ide o uzavretú plochu), globálne atmosférické modely majú iba 2 hranice: spodnú fyzickú hranicu – rozhranie medzi atmosférou a zemským povrchom – a hornú tzv. výpočtovú hranicu (istá hladina sa musí zvoliť ako strop modelu, keďže doména nemôže siahať do nekonečna). Pokiaľ ide o LAM, ten má aj bočné hranice. Na každej hranici musíme špecifikovať vhodné okrajové podmienky. Najviac komplikácií vzniká na bočných hraniciach, pretože sú otvorené pre advektívny prenos. To znamená, že realistické bočné okrajové podmienky (LBC³) musíme predpovedať pomocou riadiaceho modelu.

Prvé pokusy s LAM používali časovo nemenné bočné okrajové podmienky, a teda nepotrebovali riadiaci model (LS⁴). Numerické riešenie v tomto prípade bolo plne určené počiatočnými podmienkami vnútri LAM domény. Takéto priblíženie má dva hlavné nedostatky:

- V priebehu integrácie žiadna meteorologická informácia nemôže vstúpiť do LAM domény zvonku.
- Na bočnej hranici sa generujú neprirodzené odrazy.

Ukázalo sa, že takýto prístup môže byť použiteľný iba pre krátku integráciu. Riešenie vnútri LAM domény sa totiž postupne kontaminuje nereálnym signálom, ktorý sa šíri z bočných okrajov. Maximálna dĺžka predpovede pre daný bod vnútri LAM domény môže byť odhadnutá pomocou grupových rýchlostí meteorologicky významných vln. V synoptickom meradle ide hlavne o Rossbyho vlny. V jednom z prvých pokusov o NWP Charney [2] indikuje, že na 24 hodinovú predpoveď v stredných šírkach je potrebná doména o veľkosti približne 4000×6000 km. Podľa toho predpoveď na niekoľko dní

³LBC – *Lateral Boundary Conditions*

⁴LS – *LargeScale*, niekedy sa používa aj termín *host model*

by sa nezaobišla bez počiatočných podmienok z oblasti pokrývajúcej podstatnú časť zemského povrchu [9].

V alternatívnom prístupe sa používa riadiaci model (nemusí to byť nutne globálny model) s nízkym rozlíšením, ktorý dodáva LBC pre vnorený model s vysokým rozlíšením. Tento typ interakcie je známy ako jednosmerný coupling, keďže riadiaci model ostáva nezávislý od LAM-u. Kvalita predpovede LAM-u nie je daná len kvalitou LBC, ale vo veľkej miere závisí aj od presnejšej reprezentácie povrchu. Niektoré mezosynoptické javy sú totiž dôsledkom interakcie prúdenie – povrch. Ideálna couplingová schéma by mala špecifikovať transparentné LBC. To znamená, že by mala zabezpečiť 2 hlavné úlohy:

- Prenos vstupujúcej informácie z riadiaceho modelu do LAM domény.
- Absorbovať akýkoľvek signál, ktorý vystupuje z LAM domény.

Väčšina operatívnych NWP modelov používa Daviesovu relaxačnú schému [3], ktorá je zakomponovaná aj v modeli ALADIN.

Cieľom tejto práce je aplikovať jednosmerný Daviesov coupling na rovnice plytkej vody a analyzovať jeho vlastnosti. Vybrali sme si 1D linearizovaný prípad, pre ktorý poznáme analytické riešenie. To znamená, že poznáme správanie systému, takže ho môžeme porovnať s numerickými simuláciami.

NWP modely sú založené na hydrodynamických rovniciach s parametrizovanými subgridovými procesmi. Tento systém je dosť komplikovaný, dokonca aj keď použijeme zjednodušenia ako hydrostatickú aproximáciu a nulovosť diabatických členov. To je dôvod, prečo sa zaoberáme oveľa jednoduchším systémom rovníc plytkej vody, kde môžeme analyzovať všetky podstatné vlastnosti couplingu. Lineárna rovnica advekcie nie je až tak vhodná, pretože umožňuje šírenie vln iba jedným smerom.

2 Ciele práce

1. Výber vhodnej konečno-diferenčnej schémy pre linearizovaný 1D systém plytkej vody.
Analýza vybranej schémy: rozbor stability a disperzných vlastností.
2. Implementácia schémy – vytvorenie vlastných programov pre numerické experimenty:
 - integrácia globálneho modelu s periodickými okrajovými podmienkami,
 - odraz od pevnej steny.
3. Formulácia relaxačnej schémy v spojitom a diskretnom prípade.
4. Implementácia relaxačnej schémy a analýza jej vlastností:
 - vyšetrenie štyroch význačných prípadov,
 - minimalizácia nereálnych odrazov,
 - simulácia integrácie riadiaceho modelu a vloženého modelu.
5. Prehľad o aktuálnych problémoch spojených s couplingom v podmienkach NWP.

3 Rovnice plytkej vody

V nasledujúcej časti si odvodíme systém rovníc v sústave spojenej so Zemou, s ktorým budeme ďalej pracovať. Vyjdeme z Eulerovej rovnice pre pohyb ideálnej kvapaliny (vo vektorovom tvare):

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}, \quad (1)$$

kde \mathbf{v} je rýchlosť prúdenia vzhľadom na (rotujúci) zemský povrch, p tlak, ρ hustota, \mathbf{g} tiažové zrýchlenie a $\boldsymbol{\Omega}$ je uhlová rýchlosť otáčania Zeme.

Jednou z vlastností ideálnej kvapaliny⁵ je $\rho = \text{const}$ (nestlačiteľnosť). Rovnica kontinuity $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ sa preto zjednoduší na tvar $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Ak ďalej neuvažujeme zakrivenie Zeme (homogénne \mathbf{g}) a zanedbáme vertikálnu zložku Coriolisovho zrýchlenia (malá v porovnaní s tiažovým zrýchlením g), môžeme pre jednotlivé zložky rýchlosti $\mathbf{v} = (u, v, w)$ v karteziánskom súradnicovom systéme písať:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv, \quad (2)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu, \quad (3)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

kde $f = 2\Omega \sin \varphi$ je Coriolisov parameter (φ je zemepisná šírka) [8].

Použime teraz nasledujúce predpoklady:

- 1) u, v nezávisia od vertikálnej súradnice: $u = u(x, y, t), v = v(x, y, t)$,
- 2) platí hydrostatická aproximácia: $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$. (6)

Hydrostatická aproximácia znamená, že rovnicu (4) nahradíme rovnicou (6).

⁵Ideálna kvapalina je neviskózna, nestlačiteľná a všetky jej tzv. kvapalné elementy majú rovnakú hustotu (konštantnú).

Integrovaním rovnice hydrostatickej rovnováhy (6) dostaneme:

$$p(x, y, z, t) = p(x, y, 0, t) - \rho g z \equiv p_0(x, y, t) - \rho g z. \quad (7)$$

Pomocou (7) vylúčime z rovníc (2), (3) tlak p :

$$\frac{du}{dt} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + f v, \quad (8)$$

$$\frac{dv}{dt} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - f u, \quad (9)$$

pričom h je výška voľnej hladiny, obr. 1. Ďalej vylúčime w použitím spodnej okrajovej podmienky $w|_{z=0} = 0$ a integrovaním rovnice kontinuity:

$$w|_{z=h} = - \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (10)$$

Teraz už môžeme napísať rovnice plytkej vody v 2D prípade:

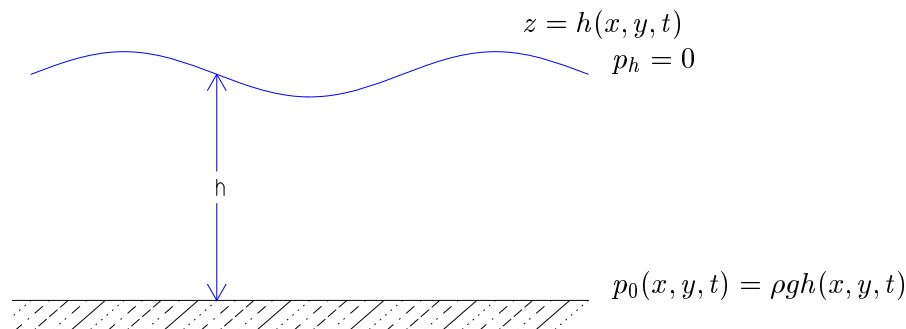
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + f v, \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - f u, \quad (12)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (13)$$

Obrázok 1: Voľná hladina.

Voľná hladina sa pohybuje spolu s časticami kvapaliny, t.j. $\frac{dh}{dt} = w|_{z=h}$.



Špeciálnym riešením nelineárneho systému (11), (12), (13) je geostrofický referenčný stav:

$$u = U = \text{const}, \quad v = V = \text{const}, \quad h = H(x, y) = \frac{f}{g}(Vx - Uy) + H_0. \quad (14)$$

Linearizáciou okolo geostrofického riešenia

$$u = U + u', \quad v = V + v', \quad h = H + h', \quad (u', v', h' \text{ sú malé perturbácie}) \quad (15)$$

dostaneme rovnice pre odchýlky od pozadia:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + V \frac{\partial u'}{\partial y} = -g \frac{\partial h'}{\partial x} + f v', \quad (16)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + V \frac{\partial v'}{\partial y} = -g \frac{\partial h'}{\partial y} - f u', \quad (17)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + U \frac{\partial h'}{\partial x} + V \frac{\partial h'}{\partial y} = -H \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right). \quad (18)$$

Položme teraz $U, V = 0$, ($H = H_0$), čím sa zbavíme advekčných členov:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -g \frac{\partial h'}{\partial x} + f v', \quad (19)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -g \frac{\partial h'}{\partial y} - f u', \quad (20)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = -H_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right). \quad (21)$$

Pozn.: Kvôli prehľadnosti budeme v ďalšom texte vynechávať apostrofy pre perturbácie, ako aj index nula pre výšku pokojnej hladiny.

V jednorozmernom prípade zo systému vylúčime aj zložku s Coriolisovým zrýchlením, keďže ide o silu pôsobiacu kolmo na rýchlosť:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (23)$$

Riešením tohto systému sú povrchové gravitačné vlny, ktoré sa šíria rýchlosťou $c = \sqrt{gH}$ voči kvapaline. Zdôraznime, že priblíženie plytkej vody platí pre $\lambda \gg H$. Uvedme si

pre názornosť príklad: ak hĺbku oceánu vezmeme 4 km, rýchlosť povrchových vĺn bude značne veľká, $c \approx \sqrt{10 \cdot 4 \cdot 10^3} \text{ ms}^{-1} = 200 \text{ ms}^{-1}$. Tieto vlny môžeme pozorovať okrem voľného povrchu aj vo vnútri tekutiny na diskontinuite hustoty [6].

Pre niektoré ďalšie aplikácie bude výhodné používať premenné

$$\phi \equiv gh \quad (\text{geopotenciál}), \quad \psi \equiv cu, \quad (24)$$

v ktorých rovnice plytkej vody majú symetrický tvar:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (26)$$

Ak eliminujeme ψ , získame štruktúrnu rovnicu:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi = 0. \quad (27)$$

Rovnaká vlnová rovnica je splnená aj pre ψ .

4 Formulácia úlohy – počiatkové a okrajové podmienky

4.1 Periodická okrajová podmienka

V prvom kroku analyzujeme 1D linearizovanú úlohu ($g, H = \text{const} > 0$) na neohraničenej oblasti

$$\begin{aligned} &\text{perturbačná rýchlosť } u(x, t), && x \in (-\infty, \infty), \quad t \in (-\infty, \infty) \\ &\text{odchýlka hladiny } h(x, t): && \text{(neohraničená oblasť)} \\ &\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, && \text{počiatkové podmienky:} \\ &\frac{\partial h}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x}, && u(x, 0) = u_0(x), \\ & && h(x, 0) = h_0(x). \end{aligned}$$

Na korektné určenie úlohy postačuje počiatková podmienka, pretože oblasť integrácie nie je ohraničená. Všeobecným riešením bude superpozícia dvoch postupných vln

$$u(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \quad (28)$$

$$h(x, t) = \frac{c}{g} f_1(x - ct) - \frac{c}{g} f_2(x + ct), \quad (29)$$

širociach sa opačným smerom rýchlosťou $c = \sqrt{gH}$. Ak vyjadríme f_1, f_2 pomocou $u_0(x), h_0(x)$ získame riešenie počiatkovej úlohy:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[u_0(x - ct) + \frac{g}{c} h_0(x - ct) \right] + \frac{1}{2} \left[u_0(x + ct) - \frac{g}{c} h_0(x + ct) \right], \quad (30)$$

$$h(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{c}{g} u_0(x - ct) + h_0(x - ct) \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{c}{g} u_0(x + ct) - h_0(x + ct) \right]. \quad (31)$$

Uvedme 2 špeciálne prípady:

$$\begin{array}{ll} h_0(x) = \frac{c}{g} u_0(x) & h_0(x) = -\frac{c}{g} u_0(x) \\ \Downarrow & \Downarrow \\ u(x, t) = u_0(x - ct), & u(x, t) = u_0(x + ct), \\ h(x, t) = h_0(x - ct), & h(x, t) = h_0(x + ct), \\ \text{vlna šíriaca sa doprava} \quad (\rightarrow) & \text{vlna šíriaca sa doľava} \quad (\leftarrow) \end{array}$$

4.2 Bočné okrajové podmienky, problém preurčenia

Analyzujeme teraz ohraničenú oblasť. V LAM-e bočné okraje nemajú svoje fyzikálne opodstatnenie. Hranice sú len umelo vytvorené a my na nich musíme formulovať okrajové podmienky, aby sme mohli riešiť zmiešanú počiatočno-okrajovú úlohu. Na integráciu našich parciálnych diferenciálnych rovníc potrebujeme hodnoty všetkých prognostických premenných v počiatočnom čase. Pokiaľ ide o LBC, na okrajoch by mali byť zadané iba určité premenné. Ak by sme na okrajoch zadali viac premenných ako je potrebné, problém by bol preurčený. V takom prípade analytické riešenie (na rozdiel od numerického) neexistuje. Príkladom preurčeného systému by bol aj náš 1D systém rovníc plytkej vody, ak by sme špecifikovali obe premenné u , h v každom čase na bočnom okraji. Inými slovami LBC by boli dynamicky nekonzistentné.

Základnú ideu možno ilustrovať na 1D lineárnej rovnici advekcie:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta(x, t) = 0, \quad \text{kde } U = \text{const} > 0, \quad (32)$$

s počiatočnou podmienkou $\zeta(x, 0) = \zeta_0(x)$, v doméne $0 \leq x \leq L$. Všeobecným riešením na priamke je postupná vlna $\zeta(x, t) = \zeta_0(x - Ut)$. Keďže ζ_0 je daná iba na ohraničenej doméne $\langle 0, L \rangle$, nevieme určiť $\zeta(0, t)$ z počiatočnej podmienky pre časy $t > 0$. Preto úloha vyžaduje okrajovú podmienku $\zeta(0, t)$. Na druhej strane, riešenie na pravom okraji domény $\zeta(L, t)$ je určené buď počiatočnou podmienkou, alebo hodnotami na ľavom okraji pre $t > L/U$, pozri obr. 2. Preto je nekorektné nezávisle predpísať $\zeta(L, t)$. Analytické riešenie v takom prípade neexistuje. Numerické riešenie síce existuje vždy, ale oproti riešeniu korektne určenej úlohy je zdegradované šumom.

Vráťme sa teraz k systému rovníc plytkej vody v tvare s nenulovou advekciou:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) + g \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) h(x, t) + H \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (34)$$

Použitím transformácie $\mathbf{p} = u + \frac{g}{c} h$, $\mathbf{q} = u - \frac{g}{c} h$, $c = \sqrt{gH}$ predošlý systém prejde na

rovnice:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (U + c)\frac{\partial}{\partial x}\right) p(x, t) = 0, \quad (35)$$

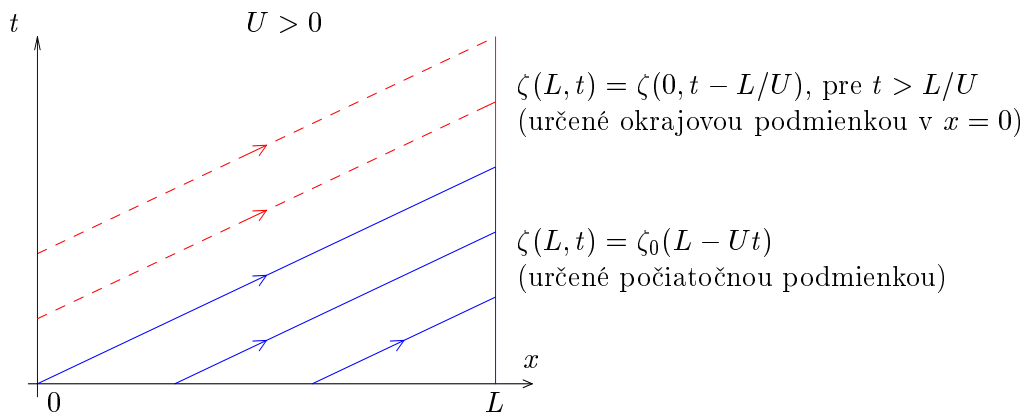
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (U - c)\frac{\partial}{\partial x}\right) q(x, t) = 0, \quad (36)$$

ktoré majú rovnaký tvar ako advekčná rovnica (32). Môžeme teda použiť rovnakú analýzu aj na rozseparovaný systém [4]. Analogicky ako pre rovnicu advekcie sa riešenie $p(x, t)$, resp. $q(x, t)$ šíri po charakteristikách $x - (U + c)t = \text{const}$, resp. $x + (U - c)t = \text{const}$. Keďže súčet rýchlostí $U + c$ je v našom prípade kladný ($U > 0$), musíme predpísať $p(0, t)$ a nepredpísať $p(L, t)$. Pokiaľ ide o premennú q , v prípade $U - c > 0$ musíme predpísať $q(0, t)$ a nesmieme predpísať $q(L, t)$. Naopak v prípade $U - c < 0$, musíme predpísať $q(L, t)$ a zároveň nesmieme predpísať $q(0, t)$. Ak teraz položíme $U = 0$, vidíme, že nesmieme predpísať $p(L, t)$, $q(0, t)$ a na riešenie postačujú dve skalárne okrajové podmienky, a to $p(0, t)$, $q(L, t)$. Nie je to ale jediný spôsob, ako korektne určiť LBC. Ako príklad uveďme 2 alternatívy v pôvodných premenných:

1. určiť $u(0, t)$, $u(L, t)$ \wedge neurčiť $h(0, t)$, $h(L, t)$,
2. určiť $h(0, t)$, $h(L, t)$ \wedge neurčiť $u(0, t)$, $u(L, t)$.

Obrázok 2: Korektná LBC na pravom okraji v rovnici advekcie.

Riešenie rovnice advekcie sa šíri po charakteristikách $x - Ut = \text{const}$.



5 Numerická schéma

Daviesov coupling nie je viazaný na nejakú špeciálnu integračnú schému, a preto táto schéma môže byť zvolená ľubovoľne. Často používaná časová schéma v NWP modeloch je *leapfrog* so semi-implicitnou korekciou. Ide o 3 hladinovú schému, druhého rádu presnosti v čase. V prípade lineárneho systému sa zredukuje na Crankovu-Nicholsonovu schému, ktorá má iba dve časové hladiny. Je to implicitná schéma, ktorej použitie si vyžaduje inverzie matíc. V 1D prípade to samozrejme nie je problém, ale pre rovnice plytkej vody existuje aj jednoduchšia alternatíva, a síce *forward-backward*⁶ schéma. Táto schéma je explicitná, takže nevyžaduje maticové inverzie. Jej nevýhodou je fakt, že je iba prvého rádu presnosti v čase.

Priestorové derivácie môžu byť aproximované metódou konečných diferencií alebo spektrálnou metódou. My sme zvolili prvú možnosť, pretože spektrálny LAM má špecifické problémy spojené so zavedením rozšírenej zóny⁷, potrebnej pre periodizáciu meteorologických polí.

Pri výbere konečno-diferenčnej schémy musíme prihliadať na tieto faktory [7], [10]:

(a) Celková chyba predpovede sa skladá z viacerých príspevkov:

- chyba vyplývajúca z použitých fyzikálnych priblížení
- chyba diskretizácie (dominantná pri veľkých Δx , Δt)
- zaokrúhľovacia chyba (dominantná pri malých Δx , Δt)
- chyba v počiatočných a okrajových podmienkach (chyba merania + neúplnosť vstupnej informácie)

V NWP modeloch preto nemá zmysel používať konečno-diferenčné aproximácie príliš vysokého rádu presnosti, keďže kvalita predpovede sa vzhľadom na ostatné zdroje chýb výraznejšie nezlepší. Pri časovej diskretizácii sa napríklad považuje druhý rád presnosti za dostačujúci.

(b) Schéma musí byť stabilná (aspoň podmiennečne).

(c) Výhodou explicitných schém je jednoduchá implementácia, aj keď tieto schémy sú nanajvýš podmiennečne stabilné. Implicitné schémy sú síce bezpodmiennečne stabilné, ale ich použitie si vyžaduje maticové inverzie. Pritom v podmienkach NWP

⁶Slovenský ekvivalent nie je ustálený, preto ostaneme pri anglickom pomenovaní.

⁷*extension zone*

ide o obrovské matice. Pre ilustráciu: nehydrostatický model so 6 prognostickými premennými (napr.: tlak p , zložky rýchlosti u , v , w , teplota T , vlhkosť q) v doméne 100×100 bodov s 50 hladinami má stavový vektor⁸ s dimenziou $6 \times 100 \times 100 \times 50 = 3 \times 10^6$. To znamená, že použitie implicitnej schémy by si vyžadovalo inverziu matíc 3 milióny \times 3 milióny! Pokiaľ by išlo o plné matice, ich inverzia by pri operatívnom použití vôbec neprichádzala do úvahy.

- (d) Ak schéma má viac ako dve časové hladiny, v riešení sa objavia nežiadúce výpočtové módy. V lineárnych systémoch sa dajú potlačiť presnou inicializáciou, v nelineárnych systémoch ich treba filtrovať. Pri trojhladinových schémach typu *leapfrog*⁸ sa bežne používa tzv. Asselinov filter. Jeho nevýhodou je, že okrem výpočtového módu slabo tlmí aj fyzikálny mód.

⁸pozri aj dodatok A

5.1 Diskretizácia

Zaveďme v 1D doméne uzlové body x_j vzdialené od seba o krok $\Delta x = x_j - x_{j-1}$, pričom $j = 1, \dots, J$. Analogicky pre časovú os $\Delta t = t_n - t_{n-1}$. Budeme používať nasledovnú notáciu:

$$u_j^n = u(j\Delta x, n\Delta t),$$

resp. stručnejšie označenie časových hladín:

$$\begin{aligned} u^+ & \dots \text{ veličina v čase } t + \Delta t, \\ u^0 & \dots \text{ veličina v čase } t. \end{aligned}$$

Všeobecný tvar *forward-backward* schémy aplikovanej na systém (22), (23) je

$$\frac{u^+ - u^0}{\Delta t} = -g \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^0 \quad - \text{ explicitná časť, (forward krok),} \quad (37)$$

$$\frac{h^+ - h^0}{\Delta t} = -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ \quad - \text{ implicitná časť, (backward krok).} \quad (38)$$

Vidíme, že časové diferencie na ľavej strane sú prvého rádu presnosti. Na diskretizáciu v priestore použijeme centrovane konečné diferencie:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_j^0 = \frac{h_{j+1}^0 - h_{j-1}^0}{2\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^+ = \frac{u_{j+1}^+ - u_{j-1}^+}{2\Delta x}, \quad (39)$$

čím si zabezpečíme druhý rád presnosti v priestore. V premenných $\phi = gh$ a $\psi = cu$ diskretizované rovnice budú v tvare:

$$\frac{\phi_j^+ - \phi_j^0}{\Delta t} = -c \frac{\psi_{j+1}^0 - \psi_{j-1}^0}{2\Delta x}, \quad (40)$$

$$\frac{\psi_j^+ - \psi_j^0}{\Delta t} = -c \frac{\phi_{j+1}^+ - \phi_{j-1}^+}{2\Delta x}. \quad (41)$$

Keďže *forward-backward* schéma je dvojhľadínová, neobsahuje výpočtový mód a na výpočet nepotrebujeme tzv. výpočtovú počiatočnú podmienku, t.j. hodnoty u_j^1, h_j^1 (v čase Δt). Tieto výhody nemá schéma *leapfrog*. Naopak nevýhodou *forward-backward* schémy je, že nie je použiteľná na advekčné členy. Pri relatívne pomalej advekcii ide len o slabú nestabilitu [7].

5.2 Stabilita

Keďže diferenčný systém (40), (41) je lineárny s konštantnými koeficientami, môžeme priamo použiť von Neumannovu metódu, podľa ktorej nutnou a postačujúcou podmienkou pre stabilitu schémy je stabilita všetkých módov. Módy systému (40), (41) možno nájsť v tvare:

$$\phi_j^n = \lambda^n e^{ikj\Delta x}, \quad (42)$$

$$\psi_j^n = \mu \lambda^n e^{ikj\Delta x}, \quad \text{pričom } \lambda, \mu \in \mathbb{C}. \quad (43)$$

Dosadením týchto vyjadrení do systému (40), (41) dostaneme sústavu rovníc, z ktorej možno určiť λ , μ . Mód je stabilný, pokiaľ $|\lambda| \leq 1$. V našom prípade má podmienka stability tvar:

$$\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \cdot |\sin k\Delta x| \leq 1. \quad (44)$$

Všetky módy, ktoré spĺňajú (44), sú neutrálne ($|\lambda| = 1$). Podmienka (44), tzv. *CFL-kritérium*, kladie obmedzenie na časový krok Δt . Najreštriktívnejšia je pre vlnu s vlnovou dĺžkou $4\Delta x$, vtedy je $k\Delta x = \pi/2$ a $\sin(k\Delta x) = 1$. *Forward-backward* schéma je stabilná, ak platí:

$$CFL = \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \leq 1. \quad (45)$$

Ak (45) porovnáme s podmienkou stability pre *leapfrog*, tak na stabilitu *forward-backward* schémy nám postačuje dvojnásobne väčší časový krok [6], [7].

5.3 Disperzné vlastnosti – fázová a grupová rýchlosť

Rozoberme vplyv diskretizácie na šírenie fázy a energie. Porovnajme fázovú rýchlosť numerického riešenia c_f so skutočnou rýchlosťou c šírenia sa vln:

$$c_f^* = \frac{c_f}{c} = \frac{\omega}{kc} = \frac{\arcsin \Re\{\lambda\}}{kc\Delta t} = \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} + \frac{\sin^3 k\Delta x}{k\Delta x} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^2 + O\left(\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^4\right),$$

pričom tento rozvoj platí iba pre voľbu krokov Δx , Δt , ktoré spĺňajú podmienku stability (45). Fázová rýchlosť vln pri tejto konečno-diferenčnej aproximácii je vždy menšia ako skutočná rýchlosť (viď graf na obr. 3). Pri najkratšej vlne $\lambda = 2\Delta x$, ktorú

môžeme ešte priestorovým rozlíšením zachytiť, je fáza stacionárna; $\sin k\Delta x = 0$.

Keďže skutočná fázová rýchlosť c je konštantná, rýchlosť, akou sa šíri energia je rovnaká s rýchlosťou šírenia fázy. V diskrétnom prípade to neplatí – numerické riešenie je disperzívne. Analogický pomer grupových rýchlostí bude:

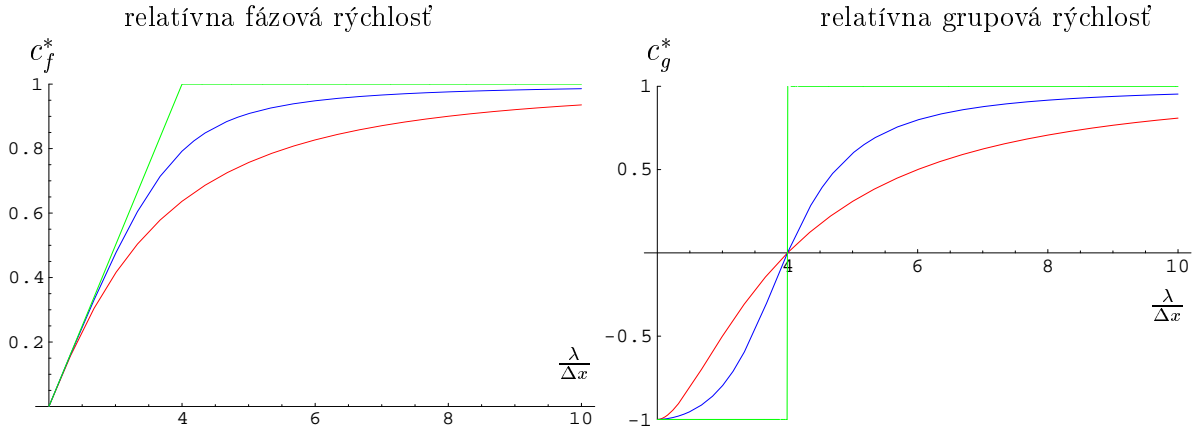
$$c_g^* = \frac{c_g}{c} = \frac{1}{c} \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kc_f^*) = \cos k\Delta x + \frac{\sin^2 k\Delta x \cdot \cos k\Delta x}{2} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^2 + O\left(\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^4\right),$$

kde podobne ako pri fáze aj energia sa podľa numerického riešenia šíri pomalšie. Pre $\lambda < 4\Delta x$ sa energia šíri nesprávnym smerom, najväčšia chyba je pri najkratšej reprezentovanej vlne $\lambda = 2\Delta x$, pre ktorú $c_g = -c$.

Na obr. 3 máme 2 limitné prípady, $\frac{c\Delta t}{2\Delta x}$ blízke nule a najväčšej možnej hodnote, ktorú podmienka stability (44) ešte pripúšťa. Pre dlhé vlny ($\lambda > 8\Delta x$) je disperzia malá a rýchlosti sú blízke skutočnej rýchlosti šírenia postupných vln. Pre voľbu časového kroku $\frac{c\Delta t}{2\Delta x} = 1$ je numerické riešenie pre vlny s $\lambda > 4\Delta x$ nedisperzívne, a teda zhodné s analytickým riešením. Takáto voľba CFL je ale na hranici stability, a preto v nelineárnom systéme nie je použiteľná [6], [7].

Obrázok 3: Disperzné vlastnosti *forward-backward* schémy.

(vlnová dĺžka λ na osi x je vyjadrená v počte priestorových krokov Δx)



$$\left. \begin{array}{l} \text{---} CFL \rightarrow 1 \\ \text{---} CFL = 0.9 \\ \text{---} CFL \rightarrow 0 \end{array} \right\} CFL = \frac{c\Delta t}{2\Delta x}$$

6 Interakcia riadiaceho a vloženého modelu

Problém korektne formulovanej LBC nie je vo všeobecnosti vyriešený. Prístup použitý v odseku 4.2 je použiteľný len v špeciálnych prípadoch. Skúmaný systém musí byť navyše lineárny. Bočné okrajové podmienky sú preto v LAM modeloch formulované nekorektne. Keďže tieto podmienky musia zabezpečiť prenos meteorologického signálu do vnútra LAM domény, nemá zmysel formulovať ich ako nedourčené. V praxi sa teda bočné okrajové podmienky formulujú ako preurčené, pričom stupeň preurčenia sa pre rôzne metódy môže líšiť. Couplingová schéma musí byť pritom navrhnutá tak, aby filtrovala šum, ktorý sa generuje vplyvom preurčenia na okrajoch domény.

Existuje viacero prístupov ako formulovať couplingovu schému. Bližšie sa zmienieme o troch z nich:

- ★ pseudoradiačná schéma
- ★ difúzna schéma
- ★ relaxačná schéma

Cieľom pseudoradiačnej schémy je zredukovať preurčenie systému. Táto schéma využíva zjednodušujúci predpoklad, že šírenie signálu v blízkosti bočnej hranice je pre každú prognostickú premennú popísané lineárnou advekčnou rovnicou. Z tejto rovnice sa potom snaží odhadnúť aktuálnu rýchlosť šírenia signálu c v jednotlivých bodoch hranice. Pokiaľ sa signál šíri dovnútra domény, hodnota príslušnej prognostickej premennej sa vo vyšetovanom bode hranice predpíše. Ak sa signál šíri von z domény, hraničná hodnota sa určí extrapoláciou zvnútra domény. Nevýhody pseudoradiačnej schémy vyplývajú z približného odhadu rýchlosti c . Ďalšie komplikácie vznikajú v prípade, keď vystupujúci signál nie je kolmý na bočnú hranicu.

Difúzna schéma predpisuje na bočných okrajoch hodnoty všetkých prognostických premenných. Na pravú stranu prognostických rovníc sa v tzv. difúznej zóne pozdĺž bočnej hranice pridáva člen $D \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial x^2}$. Schéma využíva fakt, že šum, ktorý sa generuje na okraji vplyvom preurčenia je zväčša krátkovlnný. Difúzny člen najsilnejšie tlmí práve krátke vlny. Nevýhodou schémy je, že slabo tlmí aj vstupujúci dlhovlnný signál. Difúzny koeficient D preto nesmie byť príliš veľký. Účinné zoslabenie krátkovlnného šumu si

potom vyžaduje použitie širšej difúznej zóny. Difúznu schému nemožno použiť na prenos krátkovlnného vstupujúceho signálu.

Relaxačná schéma, podobne ako difúzna schéma, predpisuje na bočných okrajoch hodnoty všetkých prognostických premenných. Na pravú stranu prognostických rovníc sa pridáva relaxačný člen $-K(x) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_{LS})$. Funkcia $K(x)$ je nenulová iba v tzv. relaxačnej zóne pozdĺž bočnej hranice, kde nadobúda kladné hodnoty. Na vnútornom okraji relaxačnej zóny je $K(x)$ nula, smerom k vonkajšiemu okraju zóny rastie. Pokiaľ sa riešenia riadiaceho a vloženého modelu zhodujú, relaxačný člen je neaktívny. Ak sa riešenia líšia, riešenie vloženého modelu relaxuje k riešeniu riadiaceho modelu s charakteristickým časom $\tau = \frac{1}{K(x)}$. Pri relaxačnej schéme odpadá problém s prenosom krátkovlnného vstupujúceho signálu. Šum, ktorý sa generuje na okraji vplyvom preurčenia je možné účinne filtrovať voľbou vhodnej funkcie $K(x)$ a primeranou šírkou relaxačnej zóny.

6.1 Požiadavky kladené na couplingovu schému

Couplingová schéma by mala zabezpečiť nasledujúce 4 funkcie:

- 1) Prenos vstupujúceho signálu z riadiaceho do vloženého modelu (obr. 4a).
- 2) Ignorovanie vystupujúceho signálu, ktorý nie je reprezentovaný vo vloženom modeli (obr. 4b).
- 3) Pohltie vystupujúceho signálu, ktorý nie je reprezentovaný v riadiacom modeli (obr. 4c).
- 4) Výstup signálu, ktorý je reprezentovaný v riadiacom aj vloženom modeli (obr. 4d).

Kritické je správanie schémy v extrémnych prípadoch 2 a 3, keď sa riešenia riadiaceho a vloženého modelu pri bočnom okraji domény výrazne líšia. Preurčenie v takýchto situáciách generuje nežiaduci numerický šum, ktorý treba filtrovať. Na druhej strane by ale filtrovanie nemalo výraznejšie ovplyvniť situácie 1 a 4, keď sú riešenia oboch modelov blízke.

6.2 Daviesova relaxačná schéma pre systém plytkej vody

6.2.1 Spojitý prípad

Rovnice plytkej vody (22), (23) po aplikácii Daviesovej relaxačnej schémy prejdú do tvaru:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - K(x)(u - u_{LS}), \quad g, H = \text{const} > 0, \quad (46)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x} - K(x)(h - h_{LS}), \quad K(x) \geq 0, \quad (47)$$

kde u_{LS} , h_{LS} je riešenie predpísané riadiacim modelom (vo všeobecnosti nejaký odhad riešenia). Pre funkciu $K(x)$ platí:

$$\begin{aligned} K(x) &> 0, & 0 \leq x \leq s \vee (L - s) \leq x \leq L, & \quad [\text{v relaxačnej zóne}], \\ K(x) &= 0, & s \leq x \leq (L - s), & \quad [\text{v centrálnej zóne}], \end{aligned}$$

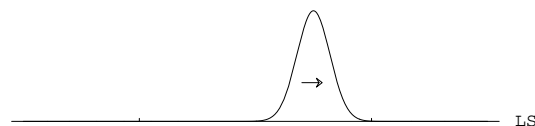
pričom s je šírka relaxačnej zóny.

Obrázok 4: 4 význačné prípady interakcie riadiaceho a vloženého modelu.



————— LAN

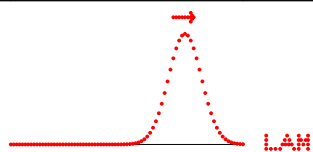
obr. 4a (prípado 1)



————— LAN

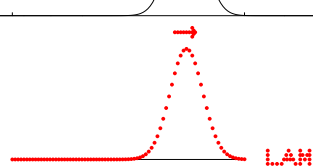
obr. 4b (prípado 2)

————— LS



obr. 4c (prípado 3)

————— LS



obr. 4d (prípado 4)

Uvažujme situáciu na obr. 4c. Z domény vloženého modelu vystupuje vlna, ktorá nie je zachytená v riadiacom modeli, teda $u_{LS}, h_{LS} = 0$. Relaxačná schéma by mala zabezpečiť jej pohltenie. Riešenie systému (46), (47) pre tento prípad možno nájsť v tvare modulovaných vln:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a_+(x) \cdot f(x - ct) && \text{pre vlnu šíriacu sa doprava (\(\rightarrow\)),} \\ u(x, t) &= a_-(x) \cdot f(x + ct) && \text{pre vlnu šíriacu sa doľava (\(\leftarrow\)),} \end{aligned}$$

$$\text{kde } a_{\pm}(x) = \exp \left[\mp \frac{1}{c} \int_s^x K(x') dx' \right] \quad \text{pre } 0 \leq x \leq L.$$

Amplitúda vlny $a(x)$ je mimo relaxačnej zóny konštantná. Funkcia $a_+(x)$ je v relaxačnej zóne klesajúca, funkcia $a_-(x)$ rastúca. Obe funkcie teda klesajú v smere šírenia príslušnej vlny. Z toho vyplýva dôležitý záver: vlny šíriace sa doľava aj doprava sú pri prechode relaxačnej zóny zoslabované. Ak vlna vystupuje na pravom okraji domény, jej amplitúda je zoslabená o faktor $\frac{a_+(L)}{a_+(L-s)}$. Odrazená vlna musí znova prekonať relaxačnú zónu, pričom sa jej amplitúda zoslabí o faktor $\frac{a_-(L-s)}{a_-(L)}$. Celkové zoslabenie amplitúdy pri odraze (tzv. reflexný koeficient) v spojitom prípade teda bude:

$$r = \frac{a_+(L)}{a_+(L-s)} \cdot \frac{a_-(L-s)}{a_-(L)} = \exp \left[-\frac{2}{c} \int_{L-s}^L K(x) dx \right].$$

6.2.2 Diskrétny prípad

Aplikujme teraz *forward-backward* časovú diferenciáciu na modifikované rovnice (46), (47), pričom relaxačné členy ošetríme implicitne. Daviesova relaxačná schéma v diskretnom prípade bude:

$$\frac{u^+ - u^0}{\Delta t} = -g \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^0 - K(x)(u^+ - u_{LS}^+), \quad (48)$$

$$\frac{h^+ - h^0}{\Delta t} = -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ - K(x)(h^+ - h_{LS}^+). \quad (49)$$

Po osamostatnení:

$$u^+ = [1 - \beta(x)] \overbrace{\left[u^0 - g \Delta t \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^0 \right]}^{u_{LAM}^+} + \beta(x) u_{LS}^+, \quad (50)$$

$$h^+ = [1 - \beta(x)] \overbrace{\left[h^0 - H \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ \right]}^{h_{LAM}^+} + \beta(x) h_{LS}^+, \quad (51)$$

$$\text{kde } 1 - \beta(x) = \frac{1}{1 + K(x)\Delta t}, \quad \beta(x) = \frac{K(x)\Delta t}{1 + K(x)\Delta t}. \quad (52)$$

Z rovníc (50)–(52) vidíme, že výsledný stav u^+ , h^+ vo vloženom modeli je váženým priemerom veličín u_{LAM}^+ , u_{LS}^+ a h_{LAM}^+ , h_{LS}^+ s váhovou funkciou $\beta(x)$. V centrálnej zóne je $\beta(x) = 0$, t.j. berie sa riešenie vloženého modelu. Bočné okrajové podmienky sú plne určené riadiacim modelom, t.j. na bočnej hranici domény je $\beta(x) = 1$. Tomu zodpovedá funkcia $K(x)$, ktorá má na bočnej hranici domény limitu $+\infty$.

Vo všeobecnosti coupling môžeme zapísať ako:

$$\mathbf{X}^+ = (1 - \beta)\mathbf{X}_{LAM}^+ + \beta\mathbf{X}_{LS}^+,$$

kde \mathbf{X} je vektor stavových veličín, v našom prípade $\mathbf{X} = (u, h)^T$.

Doplňujúce vysvetlenie:

- \mathbf{X}_{LAM}^+ – riešenie vloženého modelu v čase $t + \Delta t$ *pred aplikáciou couplingu*
- \mathbf{X}_{LS}^+ – riešenie riadiaceho modelu v čase $t + \Delta t$
- \mathbf{X}^+ – riešenie vloženého modelu v čase $t + \Delta t$ *po aplikácii couplingu*
(výsledné riešenie vloženého modelu)

6.2.3 Zhrnutie

Pri použití relaxačnej schémy je kľúčová voľba funkcie $K(x)$, resp. $\beta(x)$. V spojitom prípade je rozhodujúca plocha pod grafom funkcie $K(x)$. Čím väčšia je táto plocha, tým menší je reflexný koeficient. Situácia v diskretnom prípade je trochu zložitejšia, keďže funkcia $\beta(x)$ je reprezentovaná len v konečnom počte bodov. Pokiaľ by sa $\beta(x)$ medzi susednými gridovými bodmi zmenila skokom z hodnoty 0 na 1, zodpovedalo by

to klasickej okrajovej podmienke bez relaxačnej zóny. Keďže takáto podmienka je nevyhovujúca, funkcia $\beta(x)$ by sa mala meniť plynule. Z toho vyplýva, že šírka relaxačnej zóny musí byť niekoľkonásobne väčšia ako priestorový krok Δx .

Pozn.: Je potrebné si uvedomiť, že váhová funkcia $\beta(x)$ daná vyjadrením (52) závisí nielen od funkcie $K(x)$, ale aj od časového kroku Δt . Pokiaľ nechceme zmenou časového kroku ovplyvniť vlastnosti relaxačnej schémy, funkciu $\beta(x)$ musíme prepočítať tak, aby $K(x)$ ostalo nezmenené.

7 Numerické experimenty

Riešme numericky rovnice plytkej vody (22), (23) so zadanou počiatočnou podmienkou $u(x, 0)$. Počiatočnú podmienku pre h volíme podľa (\rightarrow). Budeme pracovať na 1D doméne s horizontálnym rozmerom $L = 10\,000$ km.

Pozn.: Konkrétny rozmer domény sa dá ale prispôbiť podľa potreby. Samozrejme zmenou L sa zmení aj dĺžka priestorového kroku Δx , ak počet deliacich bodov ostane rovnaký. Podobne je to aj s výsledným časom integrácie a dĺžkou časového kroku.

Ďalej budeme uvažovať výšku hladiny $H = 10$ km a gravitačné zrýchlenie $g = 9.81$ m.s⁻¹, teda rýchlosť šírenia povrchových gravitačných vln bude v našich experimentoch $c \approx 300$ m.s⁻¹.

Jednotlivé integrácie budeme zobrazovať v grafoch, v ktorých na horizontálnej osi bude index gridového bodu. Na vertikálnej osi budú hodnoty perturbovaných veličín $u(j\Delta x, n\Delta t)$, resp. $h(j\Delta x, n\Delta t)$. Amplitúda v čase $t = 0$ pre u je rovná jednej. Pokiaľ ide o amplitúdu h , keďže $h(x, 0) = \frac{c}{g} u(x, 0) \approx 30 \cdot u(x, 0)$, tú zmenšíme ($60\times$) tak, aby sme obe veličiny mohli porovnať v jednom grafe.

Numerické experimenty sme implementovali vo výpočtovom systéme *Mathematica*, ktorý je obľúbený nielen vo vedeckých kruhoch. Obsahuje totiž rozsiahly matematický aparát a množstvo programovacích prostriedkov v prakticky použiteľnej forme. V našom prípade sme využívali hlavne nástroje numerickej matematiky, maticové operácie a grafické funkcie.

7.1 Integrácia globálneho modelu, periodické okrajové podmienky

Uvažujme globálny model, ktorého doménou v 1D prípade je kružnica (napr. nejaká rovnobežka). Keďže kružnica nemá okraj, nevyžaduje okrajové podmienky. Pokiaľ kružnicu reprezentujeme úsečkou, treba použiť periodické okrajové podmienky. To znamená, že vlna, ktorá vystupuje na jednom konci úsečky, bude opätovne vstupovať na druhom konci úsečky (perióda L).

Zvoľme počiatočnú podmienku podľa obr. 5:

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin^8\left(\frac{3\pi}{L}x\right) & 0 \leq x \leq L/3 \\ 0 & L/3 \leq x \leq L \end{cases} \quad h(x, 0) = \frac{c}{g} u(x, 0) \quad (53)$$

Analytické riešenie takto formulovanej úlohy, ako sme videli v časti 4.1, je postupná vlna šíriaca sa doprava. To znamená, že profil u , resp. h sa v spojitom prípade posúva bez deformácie. V diskretnom prípade je situácia odlišná.

Numerické riešenie získame pomocou *forward-backward* schémy:

$$\begin{aligned} u_j^+ &= u_j^0 - \frac{g\Delta t}{2\Delta x}(h_{j+1}^0 - h_{j-1}^0), \\ h_j^+ &= h_j^0 - \frac{H\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^+ - u_{j-1}^+), \end{aligned} \quad \text{pre } j = 1, \dots, J, \quad (54)$$

s periodickou okrajovou podmienkou:

$$u_{j+J} = u_j, \quad h_{j+J} = h_j,$$

ktorá platí pre všetky časové hladiny.

Porovnajme numerické riešenie pre dva prípady s rôznym rozlíšením (obr. 6):

- 1) nízke rozlíšenie – profil sa značne deformuje \Rightarrow presnosť schémy nevyhovuje.

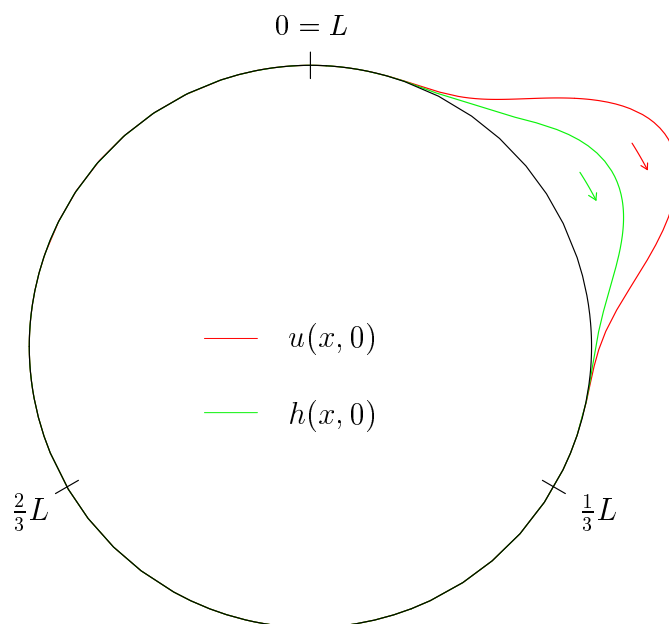
V riešení sa objaví parazitný šum Jeho veľkosť dosahuje až 30% z amplitúdy pôvodnej vlny. Táto nepresnosť je spôsobená tým, že zle reprezentované vlny $\lambda \sim 10\Delta x$ majú podľa kapitoly 5.3 veľkú fázovú chybu, t.j. šíria sa pomalšie ako dlhovlnné zložky. Preto dochádza k deformácii profilu.

- 2) vysoké rozlíšenie – malá deformácia \Rightarrow presnosť schémy postačuje.

Numerické riešenie sa len málo líši od analytického riešenia.

Krátke vlny ($\lambda \sim 10\Delta x$) nesú podstatne menšiu energiu ako v prípade 1).

Obrázok 5: Počiatočný stav na kružnici.



Na obr. 6 dole sú porovnané fourierovské spektrá pri nízkom a vysokom rozlíšení. Vidíme, že pri nízkom rozlíšení spektrum zaberá širšiu oblasť $\frac{\lambda}{\Delta x}$, t.j. príspevok od zle reprezentovaných vln je väčší ako pri vysokom rozlíšení.

Pozn.: Pripomeňme, že diskretnou Fourierovou transformáciou vektora $u_j = (u_1, \dots, u_J)$ dostaneme komplexné koeficienty:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{J}} \sum_{j=1}^J u_j \cdot e^{2\pi i(j-1)(n-1)/J}.$$

Štvorce modulov týchto koeficientov sú priamo úmerné energii, ktorú príslušná Fourierova komponenta nesie.

Záver: Zvolená schéma je použiteľná pre dostatočne jemné Δx (a $CFL \leq 1$).

Obrázok 6: Globálny model s periodickou okrajovou podmienkou.

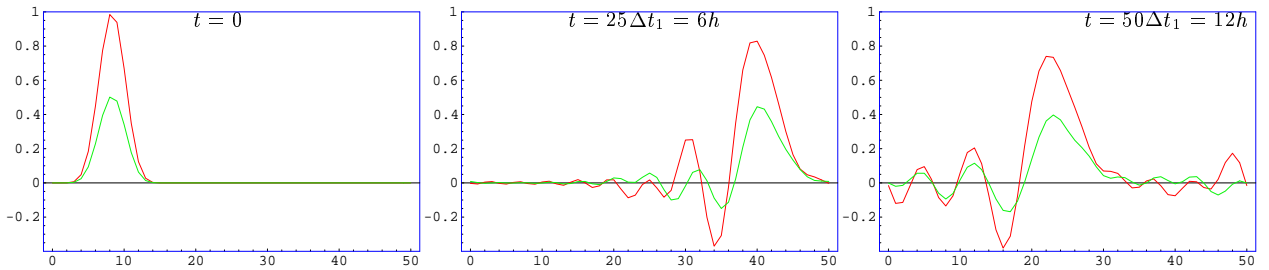
Časový vývoj integrácie v dvoch prípadoch s rôznym rozlíšením.

Rozmery: $L = 10\,000\text{ km}$, $c \approx 300\text{ m s}^{-1}$, $\Delta x_1 = 4\Delta x_2$, $\Delta t_1 = 4\Delta t_2$.

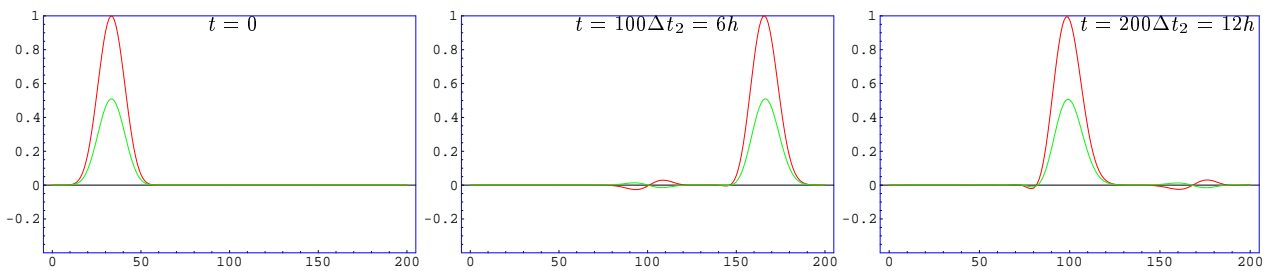
— rýchlosť u

— výška hladiny h

1) nízke rozlíšenie: $\Delta x_1 = 200\text{ km}$ ($L = 50\Delta x_1$), $\Delta t_1 = 14.4\text{ min.}$, $\frac{c\Delta t_1}{2\Delta x_1} = \frac{2}{3}$

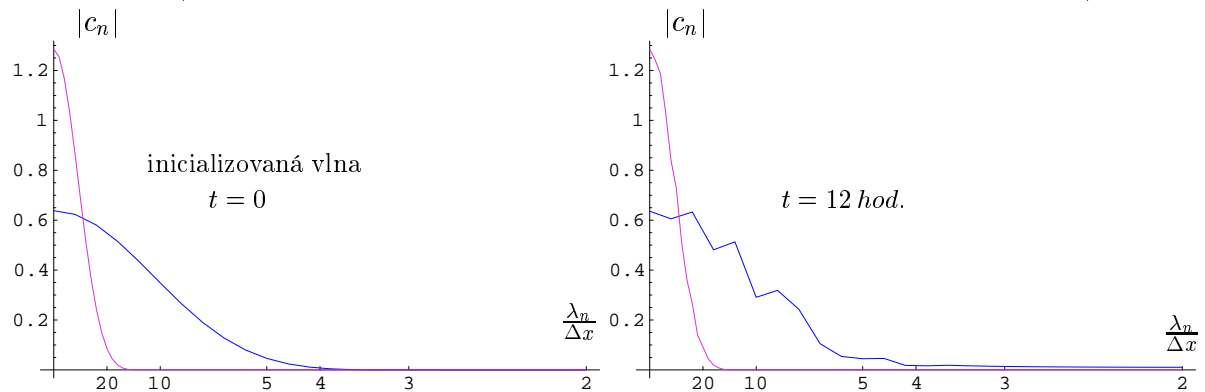


2) vysoké rozlíšenie: $\Delta x_2 = 50\text{ km}$ ($L = 200\Delta x_2$), $\Delta t_2 = 3.6\text{ min.}$, $\frac{c\Delta t_2}{2\Delta x_2} = \frac{2}{3}$



Fourierov obraz

$|c_n|$ – modul Fourierových koeficientov, ktoré určujú zastúpenie jednotlivých vln (vlnová dĺžka λ_n na osi x je vyjadrená v počte priestorových krokov Δx)



— 1) nízke rozlíšenie

— 2) vysoké rozlíšenie

7.2 Nepriepustná hranica, odraz od pevnej steny

V doméne ohraničenej pevnými stenami je situácia odlišná. Pre pevnú stenu platí, že horizontálna rýchlosť na stene je nula: $u(0, t) = 0 = u(L, t)$.

Ak túto podmienku zderivujeme podľa času a dosadíme do (22), dostaneme:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0, t) = 0 = \frac{\partial h}{\partial x}(L, t).$$

To znamená, že hladina v tesnej blízkosti steny je vodorovná.

V reči konečných diferencií to znamená, že vo vnútri domény platí (54), pričom na okrajoch sú v každom čase splnené podmienky:

$$u_0 = 0, \quad u_J = 0, \quad h_0 = h_1, \quad h_J = h_{J-1}. \quad (55)$$

Tieto podmienky v systéme plytkej vody predstavujú nepriepustnú hranicu. Pozmeňme počiatočnú podmienku z predchádzajúcej kapitoly nasledovne:

$$u(x, 0) = \exp \left[-40 \left(\frac{x - \frac{L}{2}}{L} \right)^2 \right] \quad \text{pre } 0 \leq x \leq L. \quad (56)$$

Výsledok integrácie je znázornený na obr. 7 v časovom slede. Môžeme si všimnúť, že h sa odráža s rovnakou fázou, pričom pre u dochádza k odrazu s fázou opačnou. Ak by sme integrovali dlhší čas, pozorovali by sme, že na ľavom okraji dochádza k zrkadlovému odrazu. V čase $t = 25\Delta t$ (piaty graf) je h pri okraji takmer dvojnásobné, pričom u je nulové (kinetická energia sa premení na potenciálnu). Numerické riešenie sa veľmi dobre zhoduje s analytickým, dokonca aj pre oveľa väčšie časy. Keďže máme ideálnu kvapalinu, výsledkom sú netlmené kmity. Potvrdila sa aj nedisperzivnosť numerického riešenia vďaka faktu, že v skúmanej vlne sú dominantné zložky s $\lambda > 4\Delta x$.

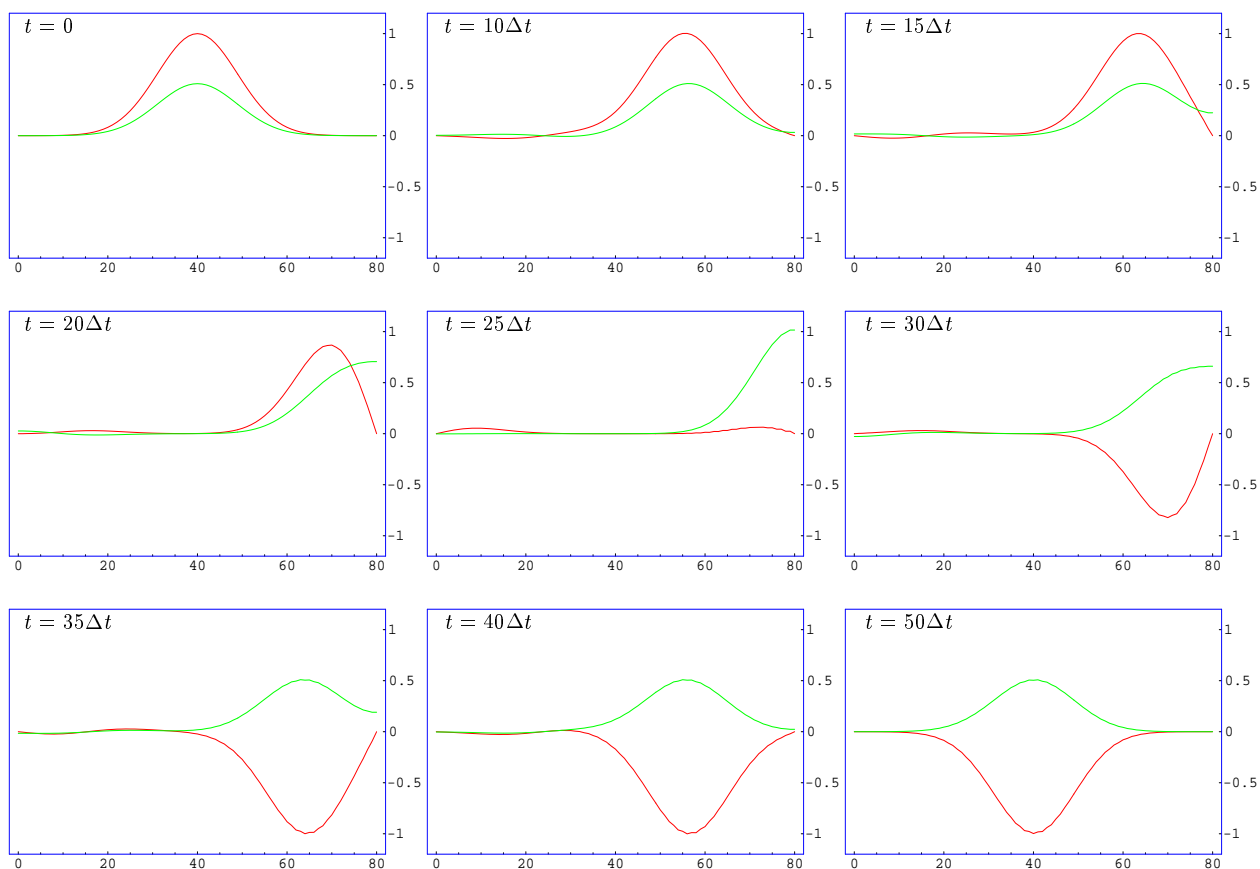
Pozn.: Prípád *pevnej steny* pre plytkú vodu je odlišný od analógu *pevného konca* pre strunu, viď dodatok B.

Záver: Použitá schéma s korektnými okrajovými podmienkami dokáže popísať odraz vlny na pevnej stene. Máme teda vyhovujúcu numerickú schému pre implementáciu couplingu.

Obrázok 7: Detailný odraz od pevnej steny.

$$L = 80\Delta x, \quad \frac{c\Delta t}{2\Delta x} = 0.8$$

— rýchlosť u
— výška hladiny h



7.3 Otvorená hranica, 4 význačné prípady

7.3.1 Formulácia úlohy, analytické riešenie vloženého modelu

Analyzujeme podrobnejšie 4 situácie z obr. 4. Predpokladajme, že riešením radiaceho modelu je postupná vlna šíriaca sa doprava rýchlosťou c (analytické riešenie). Výnimkou je prípad 3, ktorého riešenie je nulové (vlna z LAM-u nie je zachytená v radiacom modeli).

Pozn.: Keďže riešenie v radiacom modeli je analytické riešenie úlohy na priamke s danou počiatočnou podmienkou, označme ho vlnovkami (\tilde{u}, \tilde{h}) .

Situácie z obr. 4 sú popísané v nasledovnej tabuľke:

Prípad	analytické riešenie v radiacom modeli $\tilde{u}(x, t)$	počiatočná podmienka pre LAM ($0 < x < L$) $u(x, 0)$
1	$\exp \left\{ -40 \left(\frac{x-ct+L/2}{L} \right)^2 \right\}$	0
2	$\exp \left\{ -40 \left(\frac{x-ct-L/2}{L} \right)^2 \right\}$	0
3	0	$\exp \left\{ -40 \left(\frac{x-L/2}{L} \right)^2 \right\}$
4	$\exp \left\{ -40 \left(\frac{x-ct-L/2}{L} \right)^2 \right\}$	$\exp \left\{ -40 \left(\frac{x-L/2}{L} \right)^2 \right\}$

Analogicky pre premennú h bude platiť:

$$\tilde{h}(x, t) = \frac{c}{g} \tilde{u}(x, t) \quad h(x, 0) = \frac{c}{g} u(x, 0)$$

Bočné okrajové podmienky pre LAM predpíšeme z analytického riešenia radiaceho modelu nasledovne:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \tilde{u}(0, t), & u(L, t) &= \tilde{u}(L, t), \\ h(0, t) &= \tilde{h}(0, t), & h(L, t) &= \tilde{h}(L, t). \end{aligned} \tag{57}$$

Analytické riešenie v doméne vloženého modelu s týmito LBC je v prípadoch 1, 4 rovnaké ako analytické riešenie v radiacom modeli, teda postupná vlna (\tilde{u}, \tilde{h}) šíriaca sa rýchlosťou c doprava. Pokiaľ ide o prípady 2 a 3 analytické riešenie pre LAM neexistuje.

7.3.2 Numerické riešenie vloženého modelu

Overme, do akej miery sú splnené požiadavky uvedené v časti 6.1. Numerické riešenie pre LAM získame riešením nasledovnej diferenčnej schémy s váhovými koeficientami β_j :

$$\begin{aligned} u_j^+ &= [1 - \beta_j] \left[u_j^0 - \frac{g\Delta t}{2\Delta x} (h_{j+1}^0 - h_{j-1}^0) \right] + \beta_j \tilde{u}_j^+, \\ h_j^+ &= [1 - \beta_j] \left[h_j^0 - \frac{H\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^+ - u_{j-1}^+) \right] + \beta_j \tilde{h}_j^+, \end{aligned} \quad \text{pre } j = 0, \dots, J \quad (58)$$

Voľba $\beta_0, \beta_J = 1$ spĺňa okrajové podmienky (57):

$$u_0^+ = \tilde{u}_0^+, \quad u_J^+ = \tilde{u}_J^+, \quad h_0^+ = \tilde{h}_0^+, \quad h_J^+ = \tilde{h}_J^+.$$

V nasledujúcich experimentoch budeme porovnávať riešenia získané:

- a) bez použitia relaxačnej zóny (RZ): $\beta_1, \dots, \beta_{J-1} = 0$
- diferenčná schéma prechádza na (54),
- b) s použitím relaxačnej zóny (RZ) so šírkou $s = 8\Delta x$ a lineárnou funkciou $\beta(x)$:
 $\beta_i = \beta_{J-i} = 1 - \frac{i}{8}, \quad (i = 0, \dots, 8), \quad \beta_8, \dots, \beta_{J-8} = 0$

Pozn.: Kvôli lepšej orientácii bude relaxačná zóna (RZ) v grafoch vymedzená zvislou čiarou.

Prípád 1

Okrajové podmienky sú síce preurčené, ale analytické riešenie riadiaceho modelu (\tilde{u} , \tilde{h}) ich predpisuje takmer konzistentne. Z priebehu na obr. 8 vidíme, že vstup vlny je v LAM-e dobre zreprodukovaný. Ak sa pozrieme detailnejšie na rozdiel medzi numerickým a analytickým riešením (spodná časť obrázku), môžeme si všimnúť, že prenesená vlna pri použití RZ so šírkou 8 bodov neobsahuje krátkovlnnú osciláciu. Napriek tomu malá fázová chyba (vlna zaostala) nie je z numerického riešenia odstránená.

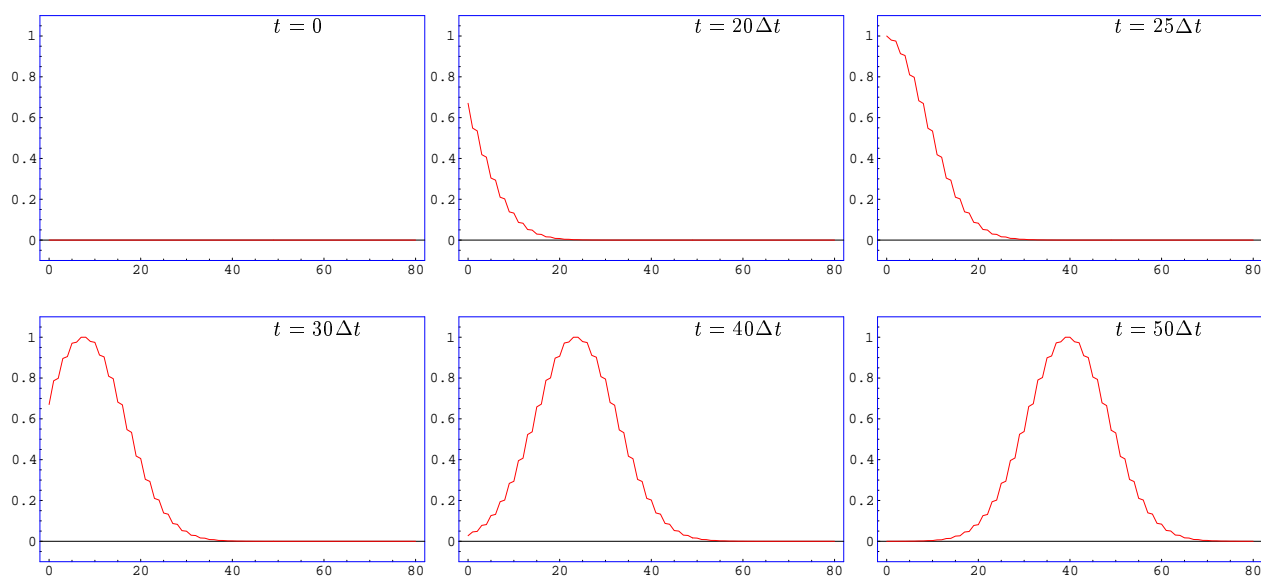
Záver 1: Vstup vlny do LAM domény nepredstavuje problém. Použitie relaxačnej zóny potláča krátkovlnný šum.

Obrázok 8: Prípád 1 – Vstup vlny z radiaceho modelu.

LBC: takmer konzistentne predpísané analytickým riešením (\tilde{u}, \tilde{h})

$$L = 80\Delta x, \quad \frac{c\Delta t}{2\Delta x} = 0.8$$

a) bez použitia RZ

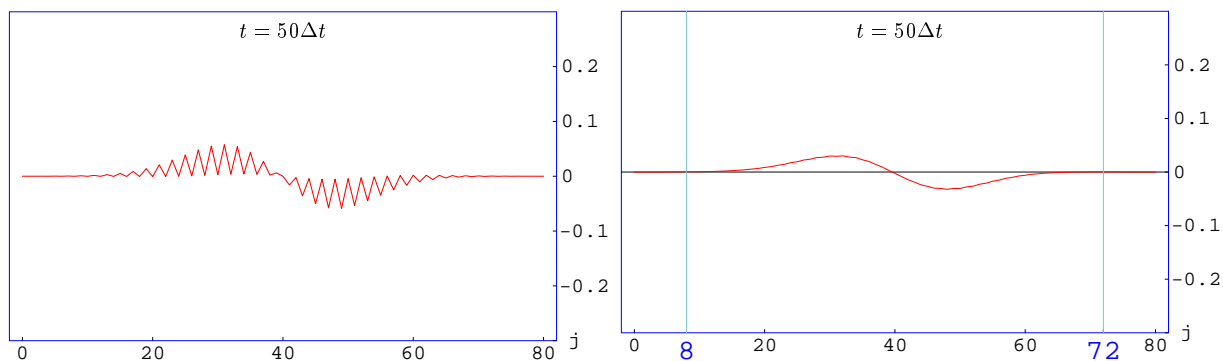


Rozdiel medzi numerickým a analytickým riešením:

$$u_j^{50} - \tilde{u}(j\Delta x, 50\Delta t)$$

a) bez použitia RZ

b) s použitím RZ



Prípád 2, 3

Keďže okrajové podmienky v prípade 2 a 3 nie sú určené korektne, pozorujeme (obr. 9, resp. 10) vytvorenie vlnového balíka šíriaceho sa od okraja domény do jej centra. Ak na okrajoch použijeme relaxačnú zónu, vlnový balík takmer úplne vymizne. Je zaujímavé, že 8-bodová relaxačná zóna (úzka v porovnaní so šírkou vstupujúcej vlny $\lambda \sim 40\Delta x$) dokáže do veľkej miery anihilovať nereálne odrazené vlny. Ak by sme urobili Fourierov obraz, zistili by sme, že z pôvodne dlhovlnného spektra ($\lambda > 20\Delta x$), ostali po odraze v LAM-e len krátkovlnné zložky ($\lambda \sim 2\Delta x$).

Záver 2, 3: V oboch prípadoch je použitie relaxačnej zóny nevyhnutné. RZ síce úplne neodfiltruje krátkovlnný šum, ale potlačí ho na prijateľnú mieru. Riešenie bez relaxačnej zóny je nepoužiteľné, keďže amplitúda šumu je rovnaká ako amplitúda pôvodnej vlny.

Prípád 4

Výsledky pre tento prípad sú veľmi podobné prípadu 1.

Záver 4: Rovnaký ako v prípade 1 – použitie RZ potláča krátkovlnný šum. Dlhovlnný šum síce nie je z riešenia odstránený, ale jeho amplitúda je malá.

Pozn. 1: Potlačenie krátkovlnného šumu by sme v prípadoch 1 a 4 dosiahli aj vyšším rozlíšením (lepšou reprezentáciou krátkych vĺn).

Pozn. 2: Existencia krátkych vĺn v modeli nie je žiadúca. Tieto vlny sú zle rozlíšené a v nelineárnom prípade môžu byť dokonca zdrojom instability.

◇ ◇ ◇

Dosiahnuté výsledky v tejto kapitole jednoznačne naznačujú, že použitie relaxačnej zóny výrazne zvýši kvalitu integrácie vloženého modelu, a to hlavne v prípadoch 2 a 3. Všetky nutné požiadavky uvedené v kapitole 6.1 sú splnené v postačujúcej miere. Daviesov coupling je teda vhodná metóda na potlačenie šumu generovaného preurčením.

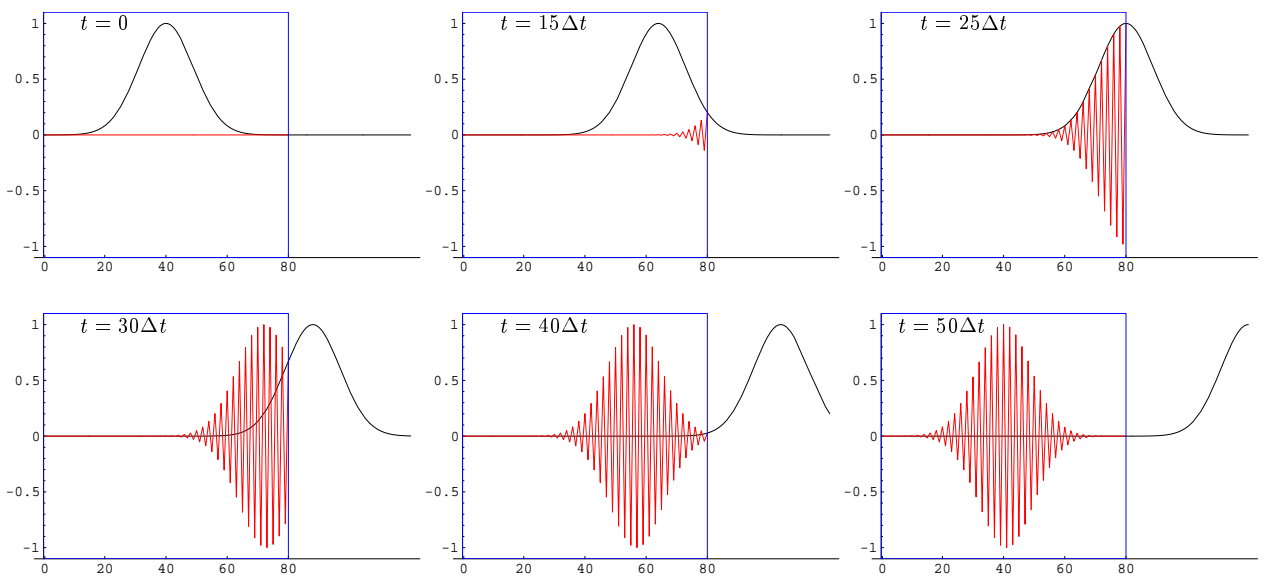
Obrázok 9: Prípád 2 – Výstup vlny, ktorá nie je reprezentovaná v LAM-e.

- vymedzenie vnoreného modelu
- riešenie vnoreného modelu u_j^n
- riešenie riadiaceho modelu – postupná vlna $\tilde{u}(x, t)$

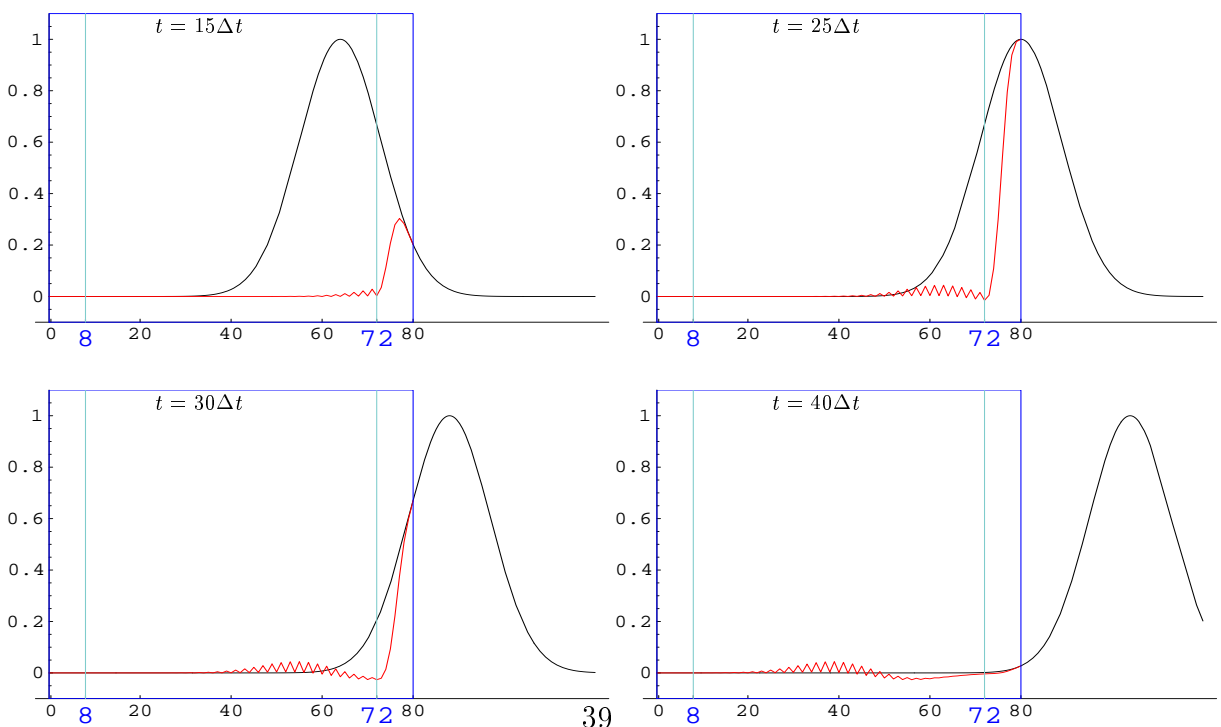
LBC: nekonzistentne predpísané riadiacim modelom (\tilde{u}, \tilde{h}).

$$L = 80\Delta x, \quad \frac{c\Delta t}{2\Delta x} = 0.8$$

a) bez použitia RZ



b) s použitím RZ

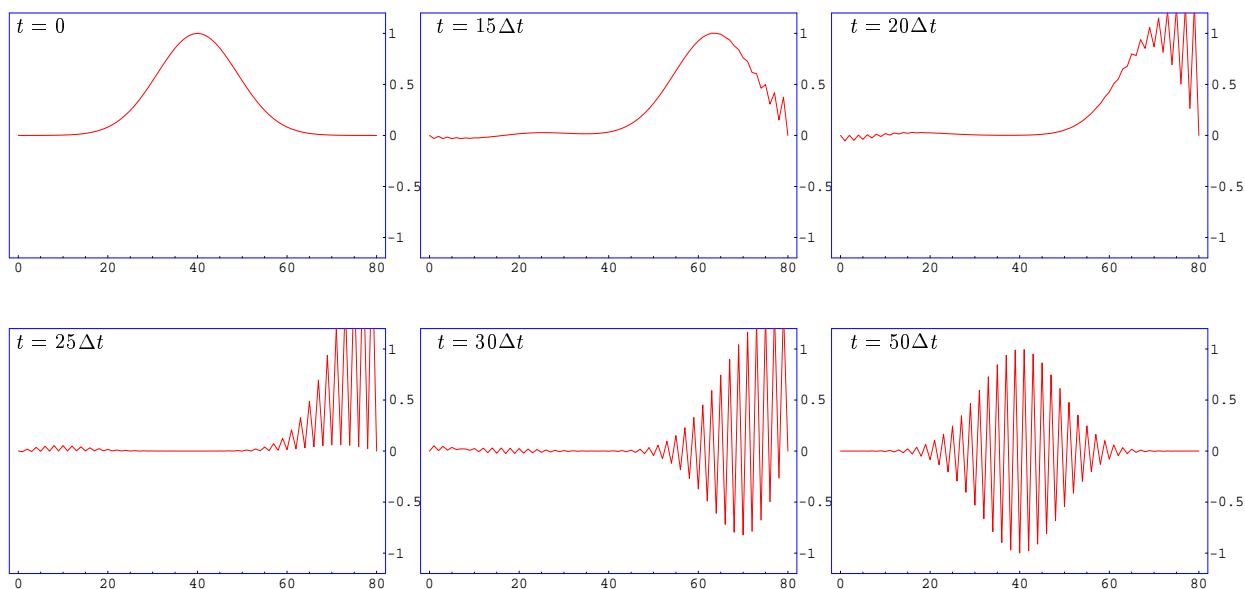


Obrázok 10: Prípád 3 – Výstup vlny, ktorá nie je reprezentovaná v LS.

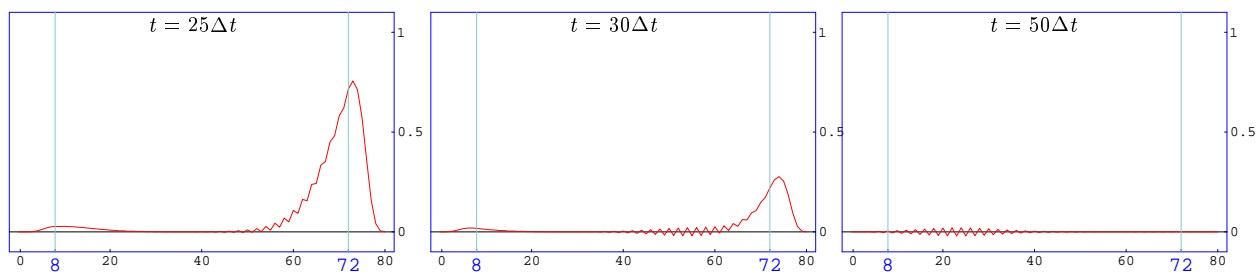
$$\text{LBC: } u(0, n\Delta t) = 0 = h(0, n\Delta t) \quad \wedge \quad u(L, n\Delta t) = 0 = h(L, n\Delta t)$$

$$L = 80\Delta x, \quad \frac{c\Delta t}{2\Delta x} = 0.8$$

 a) bez použitia RZ



 b) s použitím RZ

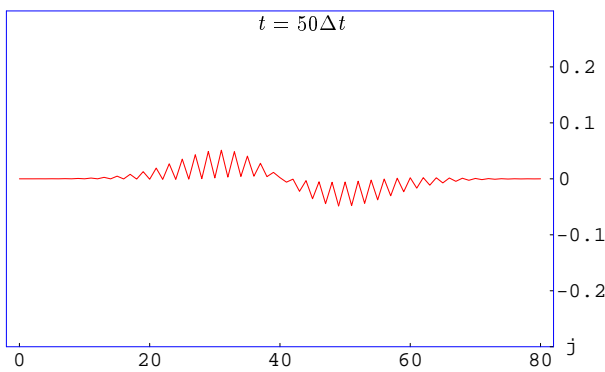


Obrázok 11: Prípád 4 – Relikt v LAM doméne bezprostredne po výstupe vlny.

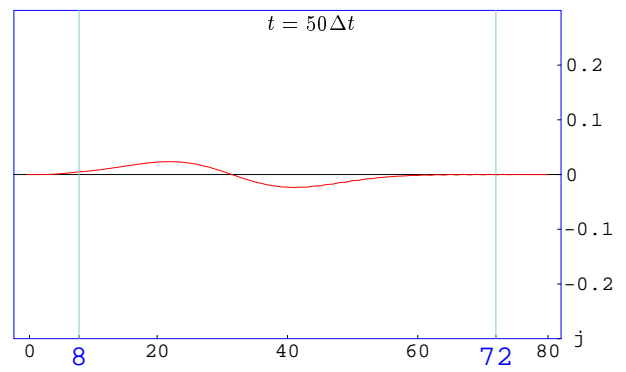
LBC: takmer konzistentne predpísané analytickým riešením (\tilde{u} , \tilde{h})

$$L = 80\Delta x, \quad \frac{c\Delta t}{2\Delta x} = 0.8$$

a) bez použitia RZ



b) s použitím RZ



7.4 Minimalizácia odrazu

V predchádzajúcich experimentoch sme pracovali s lineárnou váhovou funkciou a s relaxačnou zónou šírky $8\Delta x$. Daviesova relaxačná schéma má ale dva stupne voľnosti:

- 1) Tvar váhovej funkcie $\beta(x)$, ktorá určuje koeficienty β_j , viď obr. 12.
- 2) Rozmer relaxačnej zóny, v ktorej sú koeficienty $\beta_j \neq 0$.

Analyzujme vplyv jednotlivých faktorov na prípade 3 (obr. 4c).

7.4.1 Vplyv rozlíšenia

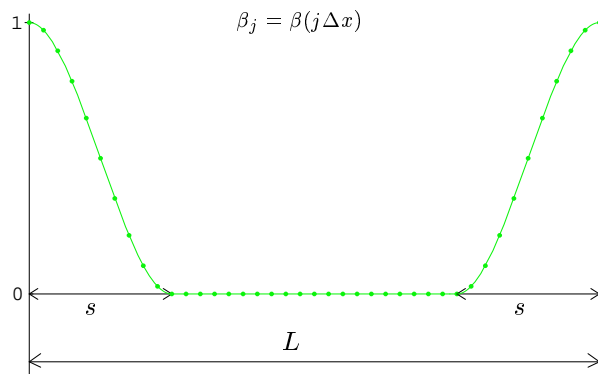
V prvom kroku sa pozrieme na to, ako vplýva priestorové rozlíšenie na pohltenie vystupujúcej vlny, ktorá nie je reprezentovaná v riadiacom modeli (prípade 3). Urobme nasledujúci experiment. Uvažujme postupnú vlnu v strede domény, so šírkou $\lambda = \frac{L}{2}$:

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}x - \frac{\lambda}{2}\right), & \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}L, \\ 0 & \text{na zvyšku domény} \end{cases} \quad \left[\text{zrezaný sínusový pulz} \right],$$

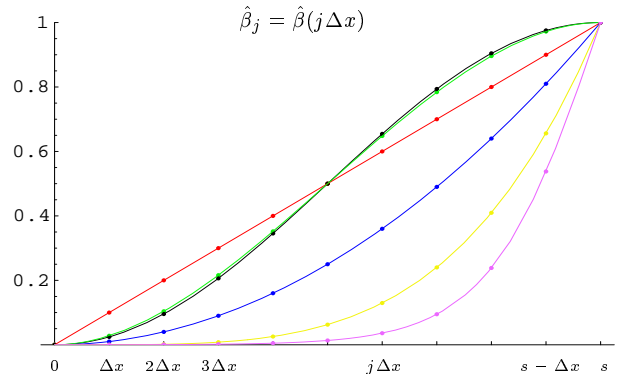
Obrázok 12: Váhová funkcia $\beta(x)$ na 1D doméne vloženého modelu.

$$\beta(x) = \begin{cases} \hat{\beta}(s-x) & 0 \leq x \leq s \\ 0 & s \leq x \leq L-s \\ \hat{\beta}(x-L+s) & L-s \leq x \leq L \end{cases}$$

- $\hat{\beta}(x) = (x/s)$
- $\hat{\beta}(x) = (x/s)^2$
- $\hat{\beta}(x) = (x/s)^2(3-2x/s)$
- $\hat{\beta}(x) = (x/s)^4$
- $\hat{\beta}(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos[\frac{\pi}{s}x])$
- $\hat{\beta}(x) = 1 - \tanh[\frac{s-x}{2\Delta x}]$



V centrálnej zóne: $\beta_j = 0$,
na okrajoch: $\beta_0 = 1 = \beta_J$.



Detailný tvar váhovej funkcie $\hat{\beta}(x)$.

ktorá vystupuje z LAM domény na pravom okraji. Budeme meniť priestorové rozlíšenie Δx a šírku relaxačnej zóny s , pričom rýchlosť c ponecháme konštantnú. Rovnako ponecháme konštantnú aj veľkosť časového kroku Δt , aby sa nezmenil charakter relaxačnej schémy. Váhová funkcia bude tým pádom lineárna vo všetkých experimentoch. Porovnajme 3 prípady rôzneho rozlíšenia:

$$\begin{aligned} L = 40\Delta x, \quad \text{teda } \lambda = 20\Delta x \quad (\text{zle reprezentovaná vlna}), \quad \frac{c\Delta t}{2\Delta x} = 0.2 \\ L = 100\Delta x, \quad \text{teda } \lambda = 50\Delta x, \quad \frac{c\Delta t}{2\Delta x} = 0.5 \\ L = 200\Delta x, \quad \text{teda } \lambda = 100\Delta x, \quad (\text{dobre reprezentovaná vlna}), \quad \frac{c\Delta t}{2\Delta x} = 1 \end{aligned}$$

Tabuľka 1: Reflexný koeficient r v závislosti od rozlíšenia a šírky RZ bezprostredne po výstupe vlny z LAM domény v čase $100\Delta t = \frac{L}{c}$.

$r = \max_{j=1,\dots,J} u(j\Delta x, 100\Delta t) \quad (\Delta t, c, \lambda = \text{const})$											
rozlíšenie	počet bodov v relaxačnej zóne, $s/\Delta x$										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16
$L = 40\Delta x$	106.49	71.62	48.99	33.33	26.2	20.98	15.78	8.96	6.21	2.76	2.43
$L = 100\Delta x$	99.57	34.29	12.71	7.21	5.73	5.16	4.28	3.81	3.37	3.04	1.98
$L = 200\Delta x$	100	3.14	3.20	3.96	2.85	2.58	2.65	2.70	2.71	2.69	2.46

Záver: Z tabuľky 1 vidieť, že pri zlepšovaní reprezentácie vln (zvyšovanie rozlíšenia) sa reflexný koeficient znižuje. Rovnako sa r znižuje aj rozširovaním relaxačnej zóny.

7.4.2 Voľba váhovej funkcie

V druhom kroku otestujme niektoré váhové funkcie s rôznymi šírkami relaxačnej zóny, pričom rozlíšenie Δx , Δt ponecháme konštantné. Keďže disperzné systémy obsahujú rôzne rýchle módy, vo všeobecnosti nestačí urobiť ladenie iba pre vlny šíriace sa jednou rýchlosťou. Nech teda rýchlosť nadobúda tieto zvolené hodnoty: $\frac{c_i\Delta t}{2\Delta x} = \{0.1, 0.2, 0.5, 1\}$. Amplitúda odrazenej vlny, ako sme videli v predchádzajúcom experimente (tab. 1), závisí aj od pomeru $\frac{\lambda}{\Delta x}$, resp. počtu priestorových krokov vo vlne. Preto budeme meniť aj dĺžku vlny v rozmedzí: $\lambda_i = \{10\Delta x, 20\Delta x, 40\Delta x\}$. Pre danú váhovou funkciu a danú šírku relaxačnej zóny môžeme zostaviť maticu reflexných koeficientov so

všetkými kombináciami (λ_i, c_j) :

$$r(\lambda_i, c_j) = \begin{pmatrix} r(\lambda_1, c_1), & r(\lambda_1, c_2), & r(\lambda_1, c_3), & r(\lambda_1, c_4) \\ r(\lambda_2, c_1), & r(\lambda_2, c_2), & r(\lambda_2, c_3), & r(\lambda_2, c_4) \\ r(\lambda_3, c_1), & r(\lambda_3, c_2), & r(\lambda_3, c_3), & r(\lambda_3, c_4) \end{pmatrix}.$$

Cieľom experimentu bude, určiť r pre všetky takéto kombinácie. Nakoniec vyberieme najväčšiu hodnotu zo získanej matice $r(\lambda_i, c_j)$ a zobrazíme ju do grafu (obr. 13).

Pozn.: V grafe máme k dispozícii maximálne r pre šírku relaxačnej zóny $s = 3\Delta x, 4\Delta x, \dots, 10\Delta x$ pre 6 rôznych váhových funkcií s legendou nachádzajúcou sa v tabuľke 2, ktorá je obohatená o ďalšie dve mocninové váhové funkcie. Tab. 2 obsahuje iba 3 vybrané šírky relaxačnej zóny.

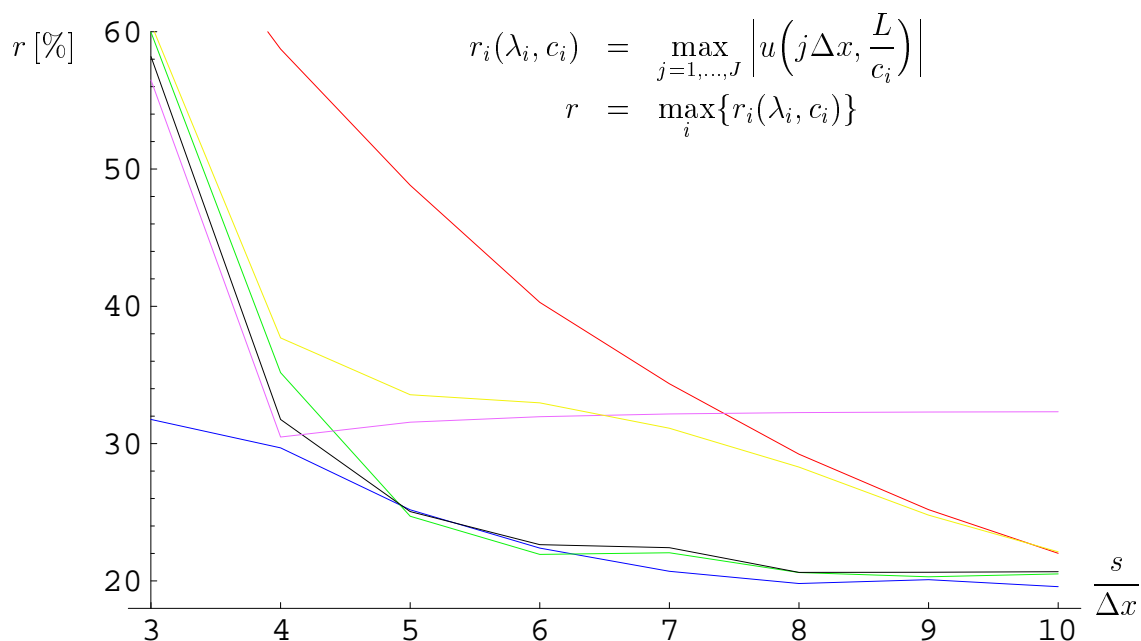
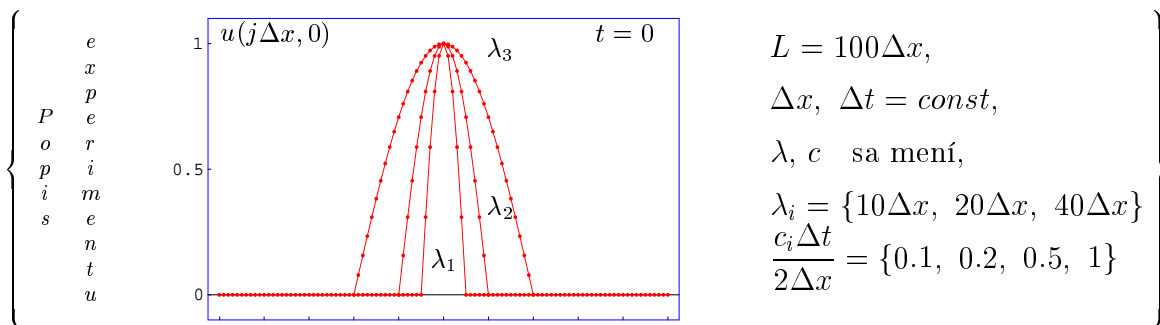
Uveďme príklad: Hodnota reflexného koeficientu $r = \mathbf{19.81}$ v tab. 2 pre $\hat{\beta}(x) = \left(\frac{x}{8\Delta x}\right)^2$ predstavuje maximálnu hodnotu z prvkov matice

$$\begin{pmatrix} 4.97, & 5.40, & 5.59, & \mathbf{19.81} \\ 2.31, & 2.79, & 2.56, & 9.83 \\ 1.49, & 1.34, & 1.13, & 4.89 \end{pmatrix}.$$

Vidíme teda, že najväčšia amplitúda odrazenej vlny je pre kombináciu $\lambda = \lambda_1 = 10\Delta x$, $c = c_4 = \frac{2\Delta x}{\Delta t}$, čo indikuje údaj $[\frac{1}{10}]$ (dodatková informácia o pozícii maximálnej hodnoty v matici). Môžeme si všimnúť, že kritická kombinácia $[\frac{1}{10}]$, teda rýchla krátka vlna, sa vyskytla takmer v dvoch tretinách prípadov.

Záver: Podobne ako v úvodnom experimente rozširovaním relaxačnej zóny klesá kritické r pre všetky vybrané váhové funkcie (až na dve výnimky). Opať sa potvrdil nepriaznivý vplyv krátkych vln. Z tab. 2 vidieť, že vhodných kandidátov na váhovú funkciu $\beta(x)$ je viacero. Ide predovšetkým o tieto funkcie: $(x/s)^2$, $(x/s)^2(3-2x/s)$, $\frac{1}{2}(1-\cos[\frac{\pi}{s}x])$, $(x/s)^3$. Pri šírke relaxačnej zóny $s = 8\Delta x$ pre všetky tieto funkcie maximálny reflexný koeficient dosahuje okolo 20%. Šírka relaxačnej zóny $s = 4\Delta x$ sa ukazuje ako nedostatočná, maximálny reflexný koeficient sa pohybuje od 30% vyššie. Na druhej strane $s = 16\Delta x$ neprináša výraznejšie zlepšenie.

Obrázok 13: Maximálny reflexný koeficient r v prípade 3 pre rôzne váhové funkcie. v závislosti od počtu bodov v RZ po výstupe vlny z LAM domény v čase $\frac{L}{c_i}$.



Tabuľka 2: Niektoré hodnoty maximálneho reflexného koeficientu r pre rôzne váhové funkcie po výstupe vlny z LAM domény v čase $\frac{L}{c_i}$.

váhová funkcia $\hat{\beta}(x)$	počet bodov v relaxačnej zóne					
	$s = 4\Delta x$		$s = 8\Delta x$		$s = 16\Delta x$	
	r	$\frac{c_j \Delta t}{2\Delta x}$ $\lambda_i/\Delta x$	r	$\frac{c_j \Delta t}{2\Delta x}$ $\lambda_i/\Delta x$	r	$\frac{c_j \Delta t}{2\Delta x}$ $\lambda_i/\Delta x$
$(x/s)^{\frac{1}{2}}$	86.72	$[\frac{0.1}{20}]$	74.05	$[\frac{0.1}{20}]$	81.28	$(\frac{0.1}{40})$
x/s	58.74	$[\frac{0.1}{20}]$	29.23	$[\frac{0.1}{20}]$	19.10	$[\frac{0.1}{10}]$
$(x/s)^2$	29.69	$[\frac{1}{10}]$	19.81	$[\frac{1}{10}]$	17.48	$[\frac{1}{10}]$
$(x/s)^3$	32.86	$[\frac{1}{10}]$	22.13	$[\frac{1}{10}]$	17.50	$[\frac{1}{20}]$
$(x/s)^2(3 - 2x/s)$	35.17	$[\frac{0.1}{20}]$	20.61	$[\frac{1}{10}]$	18.99	$[\frac{1}{10}]$
$(x/s)^4$	37.70	$[\frac{1}{10}]$	28.29	$[\frac{1}{10}]$	17.74	$[\frac{1}{10}]$
$(x/s)^6$	64.42	$(\frac{1}{40})$	34.26	$[\frac{1}{10}]$	19.62	$[\frac{1}{10}]$
$\frac{1}{2}(1 - \cos[\frac{\pi}{s}x])$	31.76	$[\frac{0.1}{20}]$	20.62	$[\frac{1}{10}]$	18.88	$[\frac{1}{10}]$
$1 - \tanh[\frac{s-x}{2\Delta x}]$	30.48	$[\frac{1}{10}]$	32.26	$[\frac{1}{10}]$	32.33	$[\frac{1}{10}]$

7.5 Spoločná integrácia riadiaceho a vloženého modelu

Ako už bolo spomenuté v úvode, použitie vloženého modelu je opodstatnené vtedy, pokiaľ tento model poskytuje presnejšie predpovede ako riadiaci model. V podmienkach NWP existujú 3 hlavné príčiny, ktoré zlepšujú predpoveď vloženého modelu. Všetky súvisia s jeho vyšším rozlíšením:

- 1) Vložený model má vďaka vyššiemu rozlíšeniu presnejšie popísaný povrch ako riadiaci model (oroografia, drsnosť, typ pôdy, vegetácia, ...). Stav prízemnej vrstvy atmosféry je silne ovplyvňovaný interakciou s povrchom.
- 2) Vložený model môže používať realistickejšie fyzikálne parametrizácie ako riadiaci model, prípadne môže opisovať niektoré procesy explicitne.
- 3) Pokiaľ má vložený model vlastný asimilačný cyklus, počiatočný stav atmosféry je v ňom reprezentovaný presnejšie ako v riadiacom modeli. Zlepšenie predpovede sa prejaví hlavne v raných štádiách integrácie, keď v riešení dominuje vplyv počiatočných podmienok. Tento vplyv sa v priebehu integrácie postupne zoslabuje, dominantnými sa stávajú okrajové podmienky.

Cieľom záverečných experimentov je vyšetriť použiteľnosť relaxačnej schémy v realistikom prípade, keď je riadiaci aj vložený model integrovaný numericky. Zameriame sa na dve skupiny experimentov. V prvej z nich sa bude riadiaci a vložený model líšiť iba rozlíšením Δx a veľkosťou časového kroku Δt . Vyšetříme vplyv relaxačnej zóny a rozlíšenia na riešenie vloženého modelu. V druhej skupine experimentov bude mať vložený model oproti riadiacemu modelu odlišnú aj hodnotu hĺbky H . Toto je jediný spôsob, ako môžeme v modeli plynkej vody s plochým dnom nasimulovať presnejšiu reprezentáciu povrchu (v našom prípade hĺbky dna).

Vráťme sa k experimentu v kapitole 7.1. Do domény vloženého modelu vstupuje vlna reprezentovaná v globálnom modeli. Rozdeľme doménu 1D globálneho modelu na 3 rovnako veľké časti, pričom prostredná tretina bude doménou vloženého modelu. Nech počiatočný stav je daný podľa (53), vid' obr. 5. Zoberme prípad nízkeho rozlíšenia v globálnom modeli $L_{LS} = 60\Delta x$. Keďže vložený model má vo všeobecnosti odlišný časový aj priestorový krok, bočné okrajové podmienky musíme interpolovať v čase aj v priestore. V našom prípade sme na interpolácie v čase, resp. priestore použili interpo-

lačný polynóm stupňa N_{LS} , resp. J_{LS} , kde N_{LS} je výsledná časová hladina. Počiatočnú podmienku treba interpolovať do celej LAM domény, v neskorších časoch stačí urobiť priestorovú interpoláciu iba do bodov ležiacich v relaxačnej zóne.

Pozn.: Pre ilustráciu môžeme uviesť, že v modeli ALADIN sú okrajové podmienky (tzv. couplingové súbory) k dispozícii len každé 3 resp. 6 hod., čo zodpovedá niekoľkým desiatkam Δt_{LAM} . Interpolácia v čase sa robí lineárne, resp. kvadraticky s využitím najbližších 2 alebo 3 súborov. Priestorové interpolácie sa robia spravidla pomocou kubických splajnov.

Záver 1: Keďže v prvej skupine experimentov bol povrch v riadiacom aj vloženom modeli reprezentovaný rovnako presne ($H_{LAM} = H_{LS}$), riešenia oboch modelov by mali byť blízke. V prípade bez použitia relaxačnej zóny to tak nie je (obr. 14), po výstupe hlavnej vlny sa v LAM doméne stáva dominantným krátkovlnný šum, ktorý úplne kontaminuje riešenie. Použitie relaxačnej zóny (obr. 15) tento problém odstraňuje. Pozorovaná odchýlka od riešenia riadiaceho modelu je v tomto prípade spôsobená odlišnými disperznými vlastnosťami numerickej schémy pri vyššom rozlíšení (týka sa to hlavne kratších vln). Ďalšie zjemňovanie rozlíšenia vloženého modelu (obr. 15 dole) neprináša výraznejšie zlepšenie.

Prvá skupina experimentov teda ukázala, že relaxačná schéma plní svoju funkciu aj v prípade, keď použitie vloženého modelu nie je nevyhnutné.

Záver 2: V druhej skupine experimentov sme položili $H_{LAM} = 0.81H_{LS}$. Interpretácia bola taká, že hodnota H_{LS} je zatažená chybou, pričom hodnota H_{LAM} je presná. Vplyvom nadhodnotenej hĺbky H sa vlny v riadiacom modeli šírili rýchlejšie ako v skutočnosti $c_{LAM} = 0.9c_{LS}$. V experimente bez relaxačnej zóny (obr. 16 hore) sa síce vlna po vstupe do LAM domény šírila vo vloženom modeli správnou rýchlosťou (zaostala za vlnou v riadiacom modeli), ale šum vygenerovaný pri jej výstupe bol vzhľadom na separáciu riešení veľmi silný. Riešenie v neskorších časoch je preto úplne nepoužiteľné. Použitie relaxačnej zóny (obr. 16 dole) viedlo k prijateľnému riešeniu, krátkovlnný šum bol podstatne zredukovaný. Vložený model odstránil fázovú chybu riadiaceho modelu, keďže prenesenú vlnu presúval vo svojej doméne správnou rýchlosťou. Na druhej strane si ale treba uvedomiť, že vložený model nemôže odstrániť chybu súvisiacu s predčasným vstupom do LAM domény.

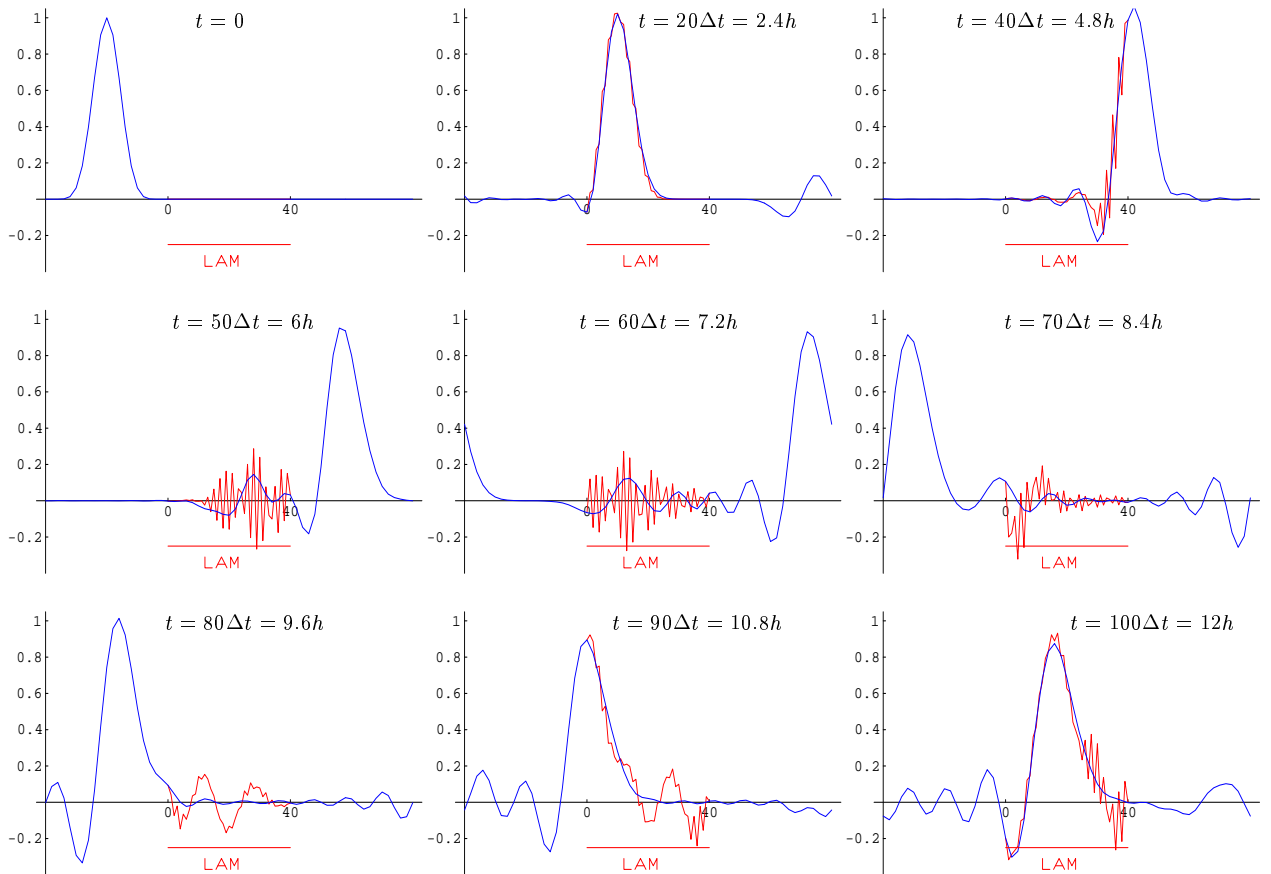
Druhá skupina experimentov ukázala, že relaxačná schéma, je použiteľná aj vtedy, keď sa dynamika radiaceho a vloženého modelu líši v dôsledku rozdielnej reprezentácie povrchu.

Obrázok 14: Spoločná integrácia radiaceho a vloženého modelu bez použitia RZ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{doména LS} = 60 \text{ gridových bodov} \\ \text{LAM} = \text{stredná tretina domény LS} \end{array} \right\} \frac{c\Delta t}{2\Delta x} = 0.8$$

— riešenie v LS
— riešenie v LAM

2× lepšie rozlíšenie v LAM doméne, $L_{LAM} = 40\Delta x$:
 $\Delta x_{LS} = 2\Delta x_{LAM}$, $\Delta t_{LS} = 2\Delta t_{LAM}$



Obrázok 15: Spoločná integrácia riadiaceho a vloženého modelu s použitím RZ.

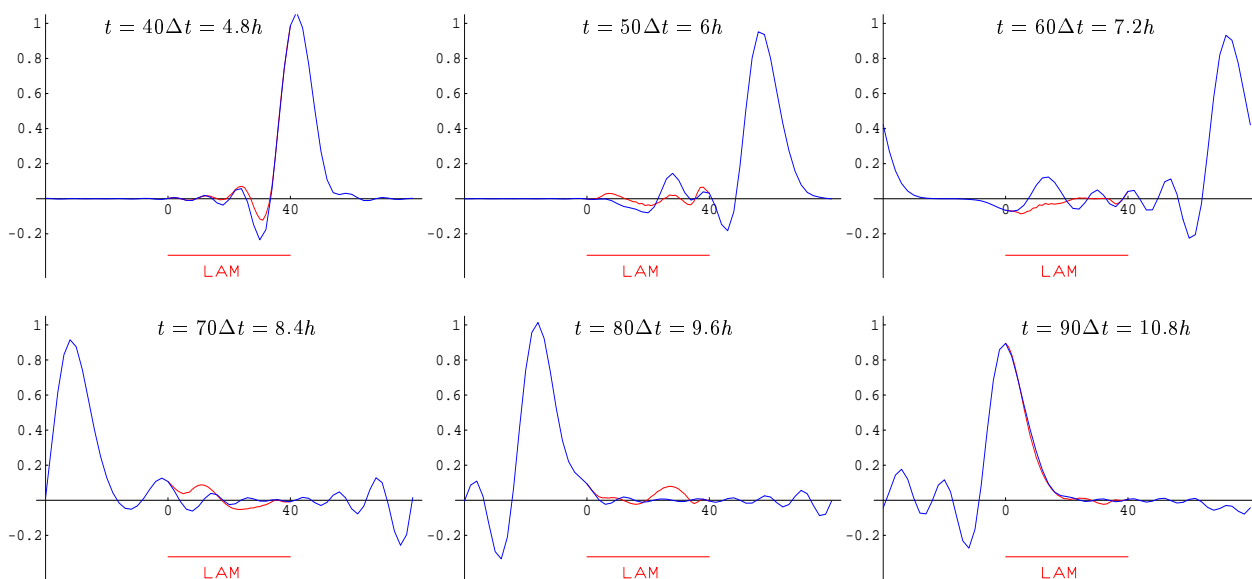
$$\left. \begin{array}{l} \text{doména LS} = 60 \text{ gridových bodov} \\ \text{LAM} = \text{stredná tretina domény LS} \end{array} \right\} \frac{c\Delta t}{2\Delta x} = 0.8$$

— riešenie v LS
— riešenie v LAM

váhová funkcia – lineárna, šírka relaxačnej zóny $s = 8\Delta x$

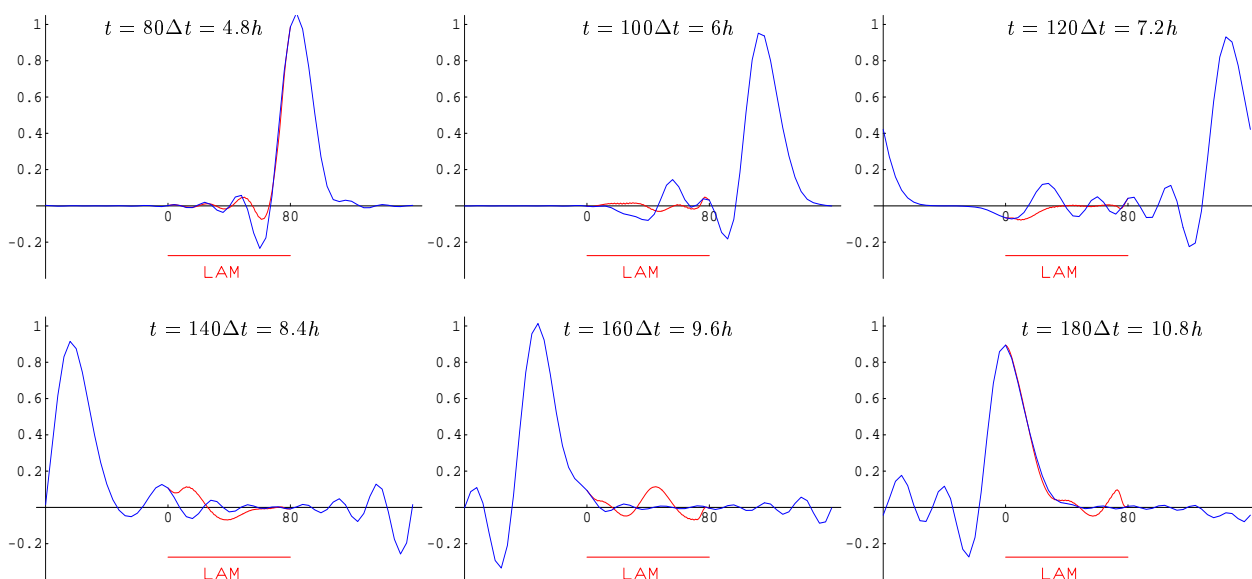
2× lepšie rozlíšenie v LAM doméne, $L_{LAM} = 40\Delta x$ (porovnaj s obr. 14):

$$\Delta x_{LS} = 2\Delta x_{LAM}, \quad \Delta t_{LS} = 2\Delta t_{LAM}$$



4× lepšie rozlíšenie v LAM doméne, $L_{LAM} = 80\Delta x$:

$$\Delta x_{LS} = 4\Delta x_{LAM}, \quad \Delta t_{LS} = 4\Delta t_{LAM}$$



Obrázok 16: Spoločná integrácia riadiaceho a vloženého modelu, v ktorom je rýchlosť šírenia o 10% menšia.

$$c_{L\text{AM}} = 0.9 c_{L\text{S}}$$

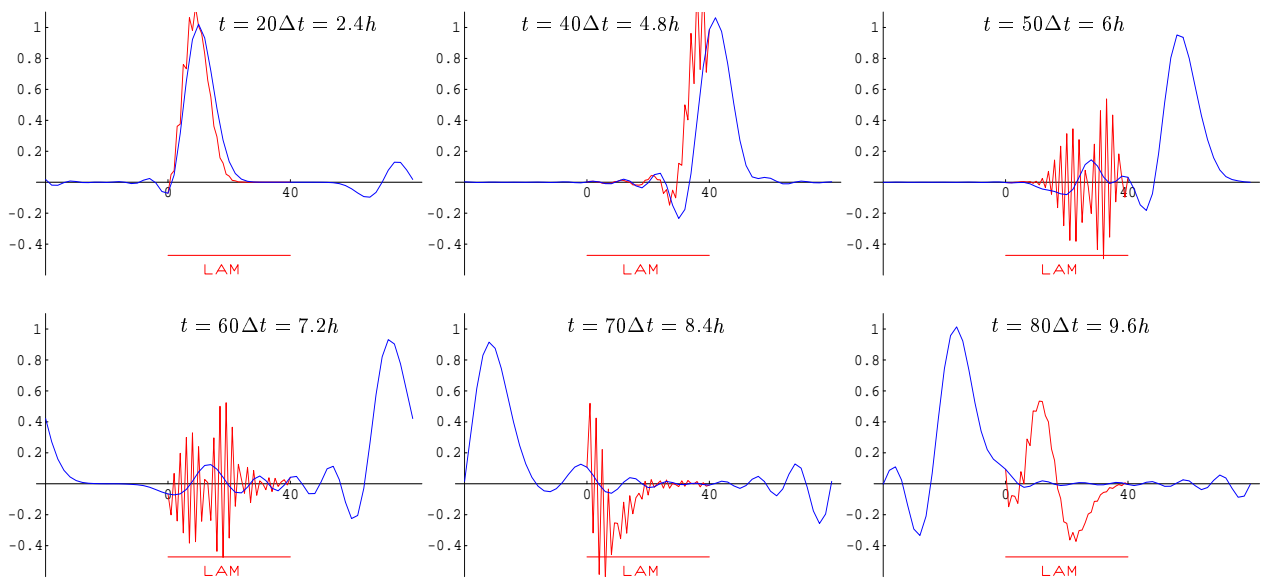
$$\left. \begin{array}{l} \text{doména LS} = 60 \text{ gridových bodov} \\ \text{LAM} = \text{stredná tretina domény LS} \end{array} \right\} \frac{c\Delta t}{2\Delta x} = 0.8$$

— riešenie v LS
— riešenie v LAM

2× lepšie rozlíšenie v LAM doméne, $L_{L\text{AM}} = 40 \Delta x$ (porovnaj s obr. 14):

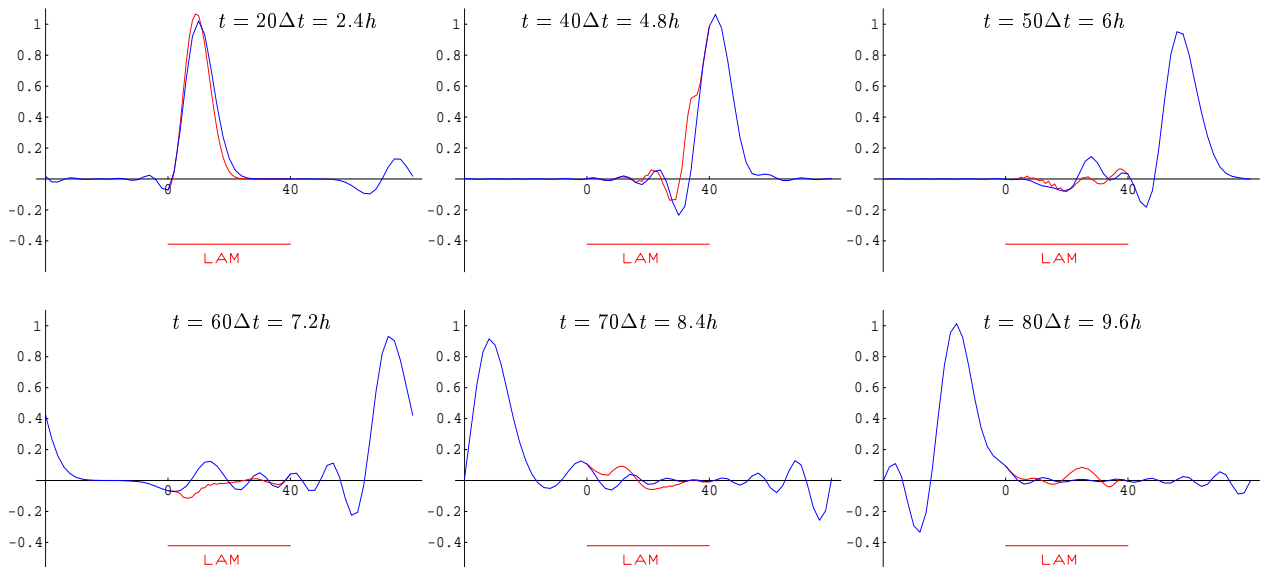
a) bez použitia RZ

$$\Delta x_{L\text{S}} = 2\Delta x_{L\text{AM}}, \quad \Delta t_{L\text{S}} = 2\Delta t_{L\text{AM}}$$



b) s použitím RZ

váhová funkcia – lineárna, šírka relaxačnej zóny $s = 8\Delta x$



8 Problémy spojené s použitím couplingu v podmienkach NWP

V podmienkach NWP sú s couplingom spojené aj ďalšie problémy, ktorých štúdium nebolo cieľom tejto práce. Stručne sa zmienime o troch z nich:

- ★ Problém dipólu
- ★ Problém rýchlej cyklóny
- ★ Problém skoku v rozlíšení

Prvé dva problémy sú spôsobené interpoláciou LBC v čase. Interpolácia začína byť problematická vtedy, keď výstupy z riadiaceho modelu nie sú dostupné s dostatočnou frekvenciou. To je žiaľ v podmienkach NWP bežný prípad, keďže riadiaci a vložený model sú často integrované v rôznych centrách. Objem prenášaných LBC súborov je potom limitovaný prenosovou kapacitou. Napríklad model ALADIN/LACE má dostupné LBC súbory len každé 3 hodiny, model ALADIN/SLOVAKIA dokonca len každých 6 hodín.

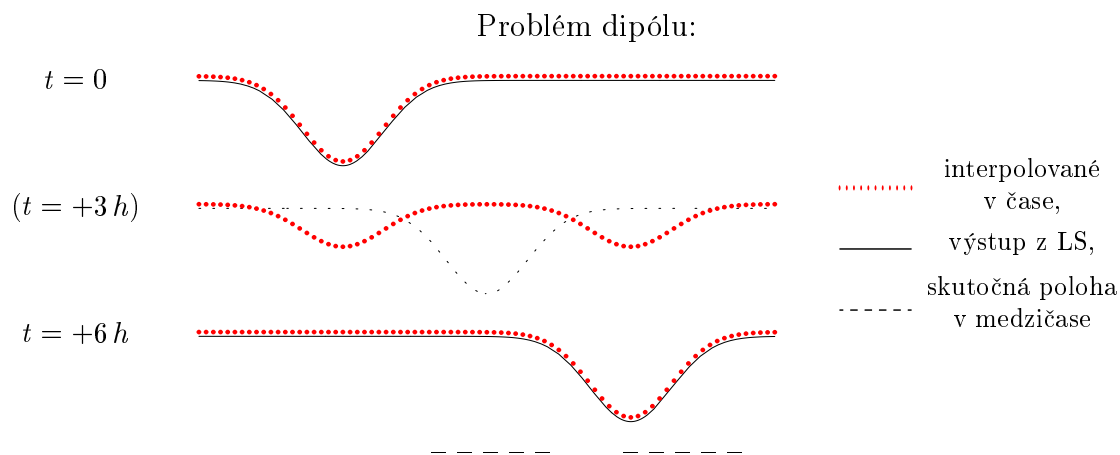
Problém dipólu vzniká vtedy, keď sa v relaxačnej zóne presúva postupná vlna, ktorá medzi dvoma couplingovými termínmi (napr. 0 a +6 hod.) prekoná porovnateľnú alebo väčšiu vzdialenosť ako je dĺžka pulzu. Pokiaľ chceme určiť LBC napr. v čase +3 hod., interpolácia nedokáže zrekonštruovať posun vlny. Namiesto toho sa objavajú dve vlny polovičnej amplitúdy (obr. 17 hore).

Problém rýchlej cyklóny sa vyskytne vtedy, keď malá cyklóna medzi dvoma couplingovými termínmi prekoná celú relaxačnú zónu. V prvom termíne sa nachádza mimo LAM domény, v druhom termíne je už v centrálnej zóne. Interpolované LBC potom nedokážu zachytiť vstup cyklóny do LAM domény (obr. 17 dole). Toto sa stalo napr. v modeli ALADIN/FRANCE 28. dec. 1999 počas tzv. vianočnej búrky. Model ARPEGE predpovedal malú cyklónu, ktorá sa rýchlo presúvala z Atlantiku nad severné Francúzsko. Model ALADIN/FRANCE v tom čase používal couplingovú frekvenciu 6 hodín a vstup tejto cyklóny nezachytil (šírka relaxačnej zóny bola necelých 100 km). Cyklóna preto v ALADIN predpovedi úplne chýbala. Bol to vážny nedostatok, keďže

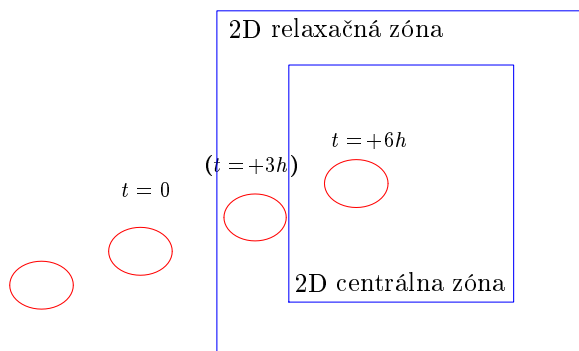
búrka spôsobila veľké materiálne škody, dokonca aj straty na ľudských životoch. Doda-
točné testy ukázali, že zvýšenie couplingovej frekvencie na 3 hodiny postačuje na to, aby
sa cyklóna do modelu ALADIN preniesla.

Posledný problém je spôsobený skokom v rozlíšení. Vložený model má vďaka
nemu presnejšie reprezentovanú orografiu ako riadiaci model. Niektoré meteorologické
polia (napr. prízemný tlak) sú ale silne závislé od nadmorskej výšky. Relaxácia takýchto
polí k zhladeným hodnotám interpolovaným z riadiaceho modelu má preto nepriaznivý
efekt. V ALADIN komunite sa z týchto dôvodov neodporúča použiť väčší skok v rozlíšení
ako je 2.5 až 3. Nie je to univerzálne rešpektované pravidlo, napr. rozlíšenie medzi
modelmi DWD/GME a DWD/LM sa mení z hodnoty zhruba 60 km až na 7 km, bez
použitia medziľahlého modelu. Problém skoku v rozlíšení je možné zredukovať napr.
relaxovaním tendencie prízemného tlaku namiesto tlaku samotného. Ďalšou možnosťou
je použiť v relaxačnej zóne vloženého modelu zhladenú orografiu, ktorá kopíruje orografiu
riadiaceho modelu.

Obrázok 17: Problém dipólu a rýchlej cyklóny.



Problém rýchlej cyklóny:



9 Záver

Modely na ohraničenej oblasti s vysokým rozlíšením dosahujú pri krátkodobej predpovedi počasia lepšie výsledky ako globálne modely s nízkym rozlíšením. Jedným z dôvodov je lepšia reprezentácia povrchu, ktorý výrazne vplýva na stav hraničnej vrstvy atmosféry. Ústrednou témou tejto práce boli bočné okrajové podmienky, ktoré sú pre model na ohraničenej oblasti kľúčové. Ako modelový systém sme si vybrali rovnice plytkej vody linearizované okolo geostrofického riešenia, obmedzené na 1 priestorový rozmer. V úvode sme odvodili analytické riešenie na priamke a analyzovali sme problémy spojené s korektnou formuláciou bočných okrajových podmienok. Ukázali sme, že pri zložitejších systémoch treba tieto podmienky formulovať ako preurčené.

Pre numerickú integráciu rovníc plytkej vody sme zvolili konečno-diferenčný prístup, pričom sme použili *forward-backward* schému. Analyzovali sme jej stabilitu a disperzné vlastnosti. Uskutočnili sme numerické experimenty s periodickou okrajovou podmienkou. Použili sme nízke a vysoké rozlíšenie. V ďalšom kroku sme integrovali model na doméne ohraničenej pevnými stenami s korektno formulovanými okrajovými podmienkami. Ukázalo sa, že zvolená schéma je pre dostatočne jemné Δx použiteľná a okrem toho dokáže popísať odraz vlny na pevnej stene.

Následne sme sformulovali Daviesovu relaxačnú schému pre rovnice plytkej vody v spojitom a diskretnom prípade. Pre numerické experimenty sme si vybrali 4 význačné prípady interakcie riadiaceho a vloženého modelu. Riešenie riadiaceho modelu sme predpísali analyticky. Použili sme relaxačnú zónu šírky 8 bodov s lineárnou váhovou funkciou. Dospeli sme k záveru, že takto zvolená relaxačná zóna potláča krátkovlnný šum generovaný na hranici domény vplyvom preurčenia. Užitočnosť relaxačnej zóny sa najviac prejavila v prípadoch, keď sa riešenie riadiaceho modelu výrazne líšilo od riešenia vloženého modelu.

Ďalej sme sa podrobne zaoberali prípadom výstupu vlny, ktorá nie je zachytená v riadiacom modeli, a preto by sa mala v relaxačnej zóne pohltiť. V experimentoch sme menili šírku relaxačnej zóny, rozlíšenie, tvar váhovej funkcie, dĺžku a rýchlosť vlny. Najskôr sme rozobrali vplyv priestorového rozlíšenia. Pri lepšej reprezentácii vln sa reflexný koeficient znižoval. Rovnaký efekt malo aj zväčšovanie počtu bodov v relaxačnej zóne. Ďalej sme testovali efektivitu viacerých váhových funkcií pri minimalizácii odrazu.

Aby sme nasimulovali efekt disperzného prostredia, pracovali sme s rôznymi dĺžkami a rýchlosťami vln, pričom sme pre každú váhovú funkciu našli najnepriaznivejšiu hodnotu reflexného koeficientu. Ukázalo sa, že lineárna váhová funkcia v disperznom systéme nepostačuje. Osvedčilo sa niekoľko iných funkcií, medzi nimi aj funkcia použitá v modeli ALADIN.

Nakoniec sme simulovali numerickú integráciu riadiaceho a vloženého modelu. Najskôr sme skúmali prípad, keď oba modely mali rovnakú hĺbku dna. Použitie relaxačnej zóny sa ukázalo ako nevyhnutné, aj keď v tomto prípade použitie vloženého modelu stráca svoje opodstatnenie. Na záver sme vo vloženom modeli použili odlišnú hĺbku dna, čo malo simulovať presnejšiu reprezentáciu povrchu. Vložený model dokázal skorigovať fázovú chybu riadiaceho modelu, ale opäť bolo nevyhnutné použiť relaxačnú zónu.

Experimentálne výsledky teda ukázali, že Daviesova relaxačná schéma pri vhodnej voľbe váhovej funkcie uspokojivo rieši problém bočných okrajových podmienok pre modely na ohraničenej oblasti.

Zoznam použitých skratiek a symbolov

ALADIN	Aire Limitée Adaptation dynamique Développement InterNational
ARPEGE	Action de Recherche Petite Échelle Grande Échelle
<i>CFL</i>	Courant–Friedrichs–Lewy (number, criterion)
DWD/GME	Deutsche WetterDienst / Global-Modell
DWD/LM	Deutsche WetterDienst / Lokal-Modell
LACE	Limited Area modelling for Central Europe
LAM	Limited Area Model – model na ohraničenej oblasti; – v našom prípade označenie vloženého modelu
LBC	Lateral Boundary Conditions – bočné okrajové podmienky
LS	LargeScale – veľkoškálový; – v našom prípade označenie riadiaceho modelu
NWP	Numerical Weather Prediction – numerická predpoveď počasia
RZ	Relaxation Zone – relaxačná zóna

c	$= \sqrt{gH}$, rýchlosť šírenia povrchových vln (v modeli plytkej vody)
f	$= 2\Omega \sin \varphi$, Coriolisov parameter
g	z -zložka tiažového zrýchlenia
h	výška voľnej hladiny (neskôr jej perturbácia)
k	x -zložka vlnového vektora
p	tlak
q	merná vlhkosť
r	reflexný koeficient
s	šírka relaxačnej zóny
t	časová súradnica
u, v, w	(x, y, z) -zložky vektora rýchlosti (neskôr ich perturbácie)
x, y	horizontálne súradnice (smerujúca na východ, resp. na sever)
z	vertikálna súradnica
L	horizotálny rozmer 1D domény
T	absolútna teplota
$\Delta; \Delta x, \Delta t$	konečno-diferenčný operátor; priestorový krok, časový krok

β	váhová funkcia
λ	vlnová dĺžka
ϕ	geopotenciál
ρ	hustota
φ	zemepisná šírka
Ω	uhlová rýchlosť otáčania Zeme

ζ	ľubovoľná premenná; $\zeta = Z + \zeta'$
Z	požadovaný stav veličiny ζ
ζ'	odchýlka veličiny ζ od požadového stavu Z , (neskôr čiarky vynechávame)
ζ_0	počiatočná podmienka pre ζ
ζ^+	ζ v čase $t + \Delta t$
ζ^0	ζ v čase t
$\tilde{\zeta}$	analytické riešenie pre veličinu ζ
ζ_{LS}	veličina vzťahujúca sa na riadiaci model
ζ_{LAM}	veličina vzťahujúca sa na vložený model

Referencie

- [1] Arakawa, Akio, 1984. **Boundary conditions in limited-area models**. Dep. of Atmospheric Sciences. University of California, Los Angeles: 28pp.
- [2] Charney, J., 1949. **On a physical basis for numerical weather prediction of large-scale motions in the atmosphere**. J. Meteor., 6, 371-385.
- [3] Davies, H.C., 1976. **A lateral boundary formulation for multi-level prediction models**. Q. J. Roy. Met. Soc., Vol. 102, 405-418.
- [4] McDonald, A., 1997. **Lateral boundary conditions for operational regional forecast models; a review**. Irish Meteorological Service, Dublin: 25 pp.
- [5] Gera, M., 2000. **Prúdenie nad orografickou prekážkou v mezosynoptickom rozlíšení**. Dizertačná práca. KMK F MFI UK Bratislava: 83 pp.
- [6] Holton, J. R., 1992. **An Introduction to Dynamic Meteorology**. Third Edition. Academic Press, Inc., New York: 491 pp.
- [7] Mesinger F., Arakawa A., 1976. **Numerical Methods Used in Atmospheric Models**. Vol. 1, WMO/ICSU Joint Organizing Committee, GARP Publication Series No. 17, 53-54.
- [8] Pechala, F., Bednář, J., 1991. **Příručka dynamické meteorologie**. Academia, Praha: 152-332.
- [9] Phillips, N. A., 1990. **Dispersion processes in large-scale weather prediction**. WMO - No. 700, Sixth IMO Lecture: 1-23.
- [10] Riddaway, R. W., (revised by M. Hortal), 2001. **Numerical methods**. Meteorological Training Course Lecture Series, ECMWF, 26-47. www.ecmwf.int/services/training/rcourse_notes.
- [11] Termonia, P., 2002. **The specific LAM coupling problem seen as a filter**. Kransjka Gora: 25 pp.
- [12] Vívoda J., 1999. **ALADIN numerický predpovedný model na ohraničenej oblasti**. Interný materiál SHMÚ: 15 pp.

Dodatky

A. Schéma *leapfrog* so semi-implicitnou korekciou

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = M(\mathbf{X}) \quad \text{– dynamické rovnice} \quad \begin{cases} \mathbf{X} \text{ – stavový vektor} \\ M \text{ – nelineárny operátor} \end{cases}$$

$$1, \dots, N \quad \text{– uzlové body 3D siete} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} p(\vec{r}, t) \\ T(\vec{r}, t) \\ \vec{v}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ T_1 \\ \vdots \\ T_N \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_1 \\ \vdots \\ v_N \\ w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}$$

1) *Leapfrog*:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-}{2\Delta t} &= M(\mathbf{X}^0) \\ \mathbf{X}^+ &= \mathbf{X}^- + 2\Delta t M(\mathbf{X}^0) \end{aligned}$$

2) *Leapfrog* + SI korekcia

Operátor M sa rozloží na lineárnu časť L a nelineárny reziduál $(M - L)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} &= (M - L)\mathbf{X} + L\mathbf{X} \\ \frac{\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-}{2\Delta t} &= \underbrace{(M - L)\mathbf{X}^0}_{\text{explicitná časť}} + L \underbrace{\frac{\mathbf{X}^+ + \mathbf{X}^-}{2}}_{\text{implicitná časť}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbb{I} - \Delta t L)\mathbf{X}^+ &= \underbrace{\mathbf{X}^- + 2\Delta t M(\mathbf{X}^0) + \Delta t L(\mathbf{X}^- - 2\mathbf{X}^0)}_{\hat{\mathbf{X}}^+} \\ \mathbf{X}^+ &= (\mathbb{I} - \Delta t L)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{X}}^+ \end{aligned}$$

V lineárnom systéme $L \equiv M$:

$$\frac{\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-}{2\Delta t} = L \frac{\mathbf{X}^+ + \mathbf{X}^-}{2} \quad \text{Crank–Nicholson}$$

B. Vlnová rovnica pre strunu, okrajové podmienky

Poloha elementu struny je popísaná výchylkou $h(x, t)$. Pre strunu bez disperzie výchylka h (pričná alebo pozdĺžna) spĺňa vlnovú rovnicu:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) h(x, t) = 0 \quad \begin{array}{l} x \in \langle 0, L \rangle \\ t \in \langle 0, \infty \rangle \end{array}$$

Označme rýchlosť struny v ($v = \frac{\partial h}{\partial t}$). Korektne určená úloha vyzerá nasledovne:

počiatočné podmienky: okrajové podmienky:

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad h(0, t) = \varphi(t),$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x, 0) = v_0(x); \quad h(L, t) = \psi(t).$$

Okrajové podmienky pre v vyplývajú z okrajových podmienok pre h :

$$v(0, t) = \frac{\partial h}{\partial t}(0, t) = \varphi'(t),$$

$$v(L, t) = \frac{\partial h}{\partial t}(L, t) = \psi'(t).$$

Pre systém

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \end{aligned}$$

bude formulácia **pevného konca** nasledovná:

pre ľavý koniec:

$$h(0, t) = 0,$$

$$v(0, t) = 0,$$

pre pravý koniec:

$$h(L, t) = 0,$$

$$v(L, t) = 0.$$

Formulácia **voľného konca** bude

pre ľavý koniec:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = 0,$$

pre pravý koniec:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(L, t) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0.$$

◇ ◇ ◇

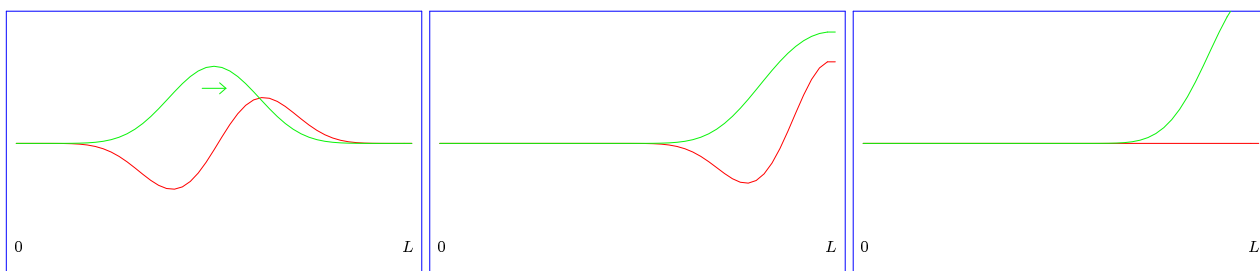
Pre rovnice plynkej vody v prípade odrazu od pevnej steny je okrajová podmienka pre u (perturbačnú rýchlosť) totožná s podmienkou na pevnom konci struny a okrajová podmienka pre h (odchýlka od voľnej hladiny) je totožná s podmienkou na voľnom konci struny.

Pozn.: Pokiaľ by sme podmienky pre pevný koniec struny, t.j. $u(L, t) = 0 = h(L, t)$, priamo aplikovali na systém rovníc plynkej vody, dostali by sme preurčený systém, čo by sa prejavilo generovaním šumu, viď obr. 10.

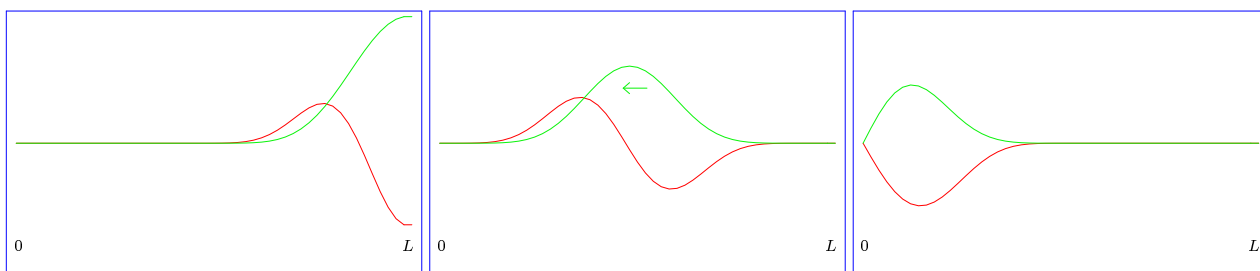
Obrázok 18: Voľný a pevný koniec pre strunu.

— výchylka struny h
 — $\frac{\partial h}{\partial t} = v$ (rýchlosť zmeny výchylky)

počiatočný stav: postupná vlna šíriaca sa doprava



stav po odraze od **voľného** konca: $\frac{\partial h}{\partial x}(L, t) = 0$ [odraz h s rovnakou fázou]



stav po odraze od **pevného** konca: $h(0, t) = 0$ [odraz h s opačnou fázou]

